Etude des variations d'une fonction

1. Variations d'une fonction sans étude de la dérivée

Ex 1 Etudier les variations des fonctions suivantes (sans utilisation de la dérivée) :

1. $f(x) = -2x^2 + 4$ sur $]-\infty\,;0[$

Sur $]$-$\infty\,;0[$, $x \mapsto x^2$ est décroissante (fonction u)

donc la fonction $x \mapsto -2x^2$ est croissante sur $]$-$\infty\,;0[$ (fonction $v = ku$ avec $k = -2 < 0$)

puis la fonction $x \mapsto -2x^2 + 4$ est croissante sur $]$-$\infty\,;0[$ (fonction $v + 4$)

2. $g(x) = 3\sqrt{x} - 2$ sur $[0\,;+\infty[$

Sur $[0\,;+\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante (fonction u)

donc la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (fonction $v = ku$ avec $k = 3 > 0$)

puis la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x} - 2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ (fonction $v - 2$)

3. $h(x) = \dfrac{1}{-3x+5}$ sur $[2\,;+\infty[$

Sur $[2\,;+\infty[$, $x \mapsto -3x + 5$ est décroissante (fonction affine avec $a = -3 < 0$) (fonction u)

et est négative (car s'annule pour $x = \dfrac{5}{3}$)

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{-3x+5}$ est croissante sur $[2\,;+\infty[$ (fonction $\dfrac{1}{u}$)

4. $p(x) = \dfrac{-5}{2x+4}$ sur $]2\,;+\infty[$

Sur $]2\,;+\infty[$, $x \mapsto 2x + 4$ est croissante (fonction affine avec $a = 2 > 0$) (fonction u)

et est positive (car s'annule pour $x = -2$)

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x+4}$ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$ (fonction $v = \dfrac{1}{u}$)

puis la fonction $x \mapsto \dfrac{-5}{2x+4}$ est croissante sur $]2\,;+\infty[$ (fonction kv avec $k = -5 < 0$)

2. Variations d'une fonction avec étude de la dérivée

Ex 2 Etudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$

$f'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}} \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2. $g(x) = \dfrac{3x+2}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{3(1-x^2) - (3x+2) \times (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3 - 3x^2 + 6x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{3x^2 + 4x + 3}{(x^2+1)^2}}$$

On cherche le signe de $g'(x)$ qui a même signe que le trinôme $3x^2 + 4x + 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 = -20 < 0$

Le trinôme n'a pas de racine, il est donc toujours du signe de a $(a = 3)$ donc le trinôme est positif sur $\mathbb{R}$ et donc

$g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $h(x) = 2x^3 - 12x$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{h'(x) = 6x^2 - 12}$ $6x^2 - 12$ est un trinôme. Pour trouver son signe, on cherche ses racines c'est-à-dire les solutions de $6x^2 - 12 = 0$ soit $x^2 = 2$ et donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

$a = 2 > 0$ donc le trinôme est du signe positif sauf entre ses deux racines.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$$h\left(-\sqrt{2}\right) = 2\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 12 \times \left(-\sqrt{2}\right) = 2 \times \left(-2\sqrt{2}\right) + 12\sqrt{2} = -4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$h\left(\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}\right)^3 - 12 \times \sqrt{2} = 2 \times \left(2\sqrt{2}\right) - 12\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$$

Remarque : $h(-x) = 2(-x)^3 - 12(-x) = -2x^3 + 12x = -h(x)$ On a donc bien $h\left(-\sqrt{2}\right) = -h\left(\sqrt{2}\right)$