Applications linéaires

1. Vérifier qu'un ensemble a pour propriété $\mathscr{P}$

On dit qu'un ensemble E a pour propriété $\mathscr{P}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $v \in E$ alors $u + v \in E$.

(2) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$ alors $ku \in E$.

Ex 1 Démontrer que les ensembles suivants vérifient la propriété $\mathscr{P}$.

1. $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

(1) Soit $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$ alors $u = a + ib$ avec a et b réels et $v = a' + ib'$ avec a' et b' réels.

On a : $u + v = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$ avec $a + a'$ et $b + b'$ réels donc $u + v \in \mathbb{C}$.

(2) Soit $u \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $u = a + ib$ avec a et b réels.

On a : $ku = k(a + ib) = (ka) + i(kb)$ avec ka et kb réels donc $ku \in \mathbb{C}$.

Conclusion : $\mathbb{C}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2. $\mathscr{E}$: Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \alpha e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $f \in \mathscr{E}$ et $g \in \mathscr{E}$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha e^x$ et il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \beta e^x$.

La fonction $f + g$ est définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ donc $(f + g)(x) = \alpha e^x + \beta e^x = (\alpha + \beta)e^x$ avec $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ donc $f + g \in \mathscr{E}$.

(2) Soit $f \in \mathscr{E}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha e^x$.

La fonction kf est définie par $(kf)(x) = k \times f(x)$ donc $(kf)(x) = k \times \alpha e^x = (k\alpha)e^x$ avec $k\alpha \in \mathbb{R}$ donc $kf \in \mathscr{E}$.

Conclusion : $\mathscr{E}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

3. $\mathscr{D}$: Ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $g \in \mathscr{D}$ alors f et g sont dérivables.

On a vu en Terminale S que $f + g$ est dérivable $\big($avec $(f + g)' = f' + g'\big)$ donc $f + g \in \mathscr{D}$.

(2) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable.

On a vu en Terminale S que kf est dérivable $\big($avec $(kf)' = kf'\big)$ donc $kf \in \mathscr{D}$.

Conclusion : $\mathscr{D}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

4. $\mathscr{S}$: Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

(1) Soit $f \in \mathscr{S}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors f est solution de $2y' + 3y = 0$ c'est-à-dire $2f'(x) + 3f(x) = 0$ et $2g'(x) + 3g(x) = 0$.

On doit vérifier que $f + g \in \mathscr{S}$ c'est-à-dire que $f + g$ est solution de $2y' + 3y = 0$ soit $2(f+g)'(x) + 3(f+g)(x) = 0$

On a : $2(f + g)'(x) + 3(f + g)(x)$

$= 2(f'(x) + g'(x)) + 3(f(x) + g(x))$

$= 2f'(x) + 2g'(x) + 3f(x) + 3g(x)$

$= 2f'(x) + 3f(x) + 2g'(x) + 3g(x)$

$= 0 + 0 = 0$

donc $f + g \in \mathscr{S}$

(2) Soit $f \in \mathscr{S}$ et $g \in \mathscr{S}$ alors f et g sont solutions de $2y' + 3y = 0$ c'est-à-dire que $2f'(x) + 3f(x) = 0$.

On doit vérifier que $kf \in \mathscr{S}$ c'est-à-dire que kf est solution de $2y' + 3y = 0$ soit $2(kf)'(x) + 3(kf)(x) = 0$

On a :

$2(kf)'(x) + 3(kf)(x)$

$= 2(kf'(x)) + 3(kf(x))$

$= 2kf'(x) + 3kf(x)$

$= (2f'(x) + 3f(x))$

$= k \times 0 = 0$

donc $kf \in \mathscr{S}$.

Conclusion : $\mathscr{S}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2. Applications linéaires

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ avec E vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

On dit que f est linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $v \in E$ on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

(2) Si pour tout $u \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $f(ku) = kf(u)$.

Ex 2

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Démontrer que f est linéaire.

On a : $f(z) = \bar{z}$.

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ on doit démontrer que $f(z+z') = f(z) + f(z')$

On a : $f(z+z') = \overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'} = f(z) + f(z')$

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $f(kz) = kf(z)$

On a : $f(kz) = \overline{kz} = \overline{k}\bar{z} = k\bar{z} = kf(z)$ $\qquad \overline{k} = k$ car k est réel.

Conclusion : f est linéaire.

Ex 3 On note :

$\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{D} &\longmapsto \mathscr{F} \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

(1) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $g \in \mathscr{D}$ on doit démontrer que $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

On a : $\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \varphi(f) + \varphi(g)$

(2) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $\varphi(kf) = k\varphi(f)$

On a : $\varphi(kf) = (kf)' = kf' = k\varphi(f)$

Conclusion : φ est linéaire.

Ex 4 On note :

$\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{D} &\longmapsto \mathscr{F} \\ f &\longmapsto 4f' - f \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

On a : $\varphi(f) = 4f' - f$

(1) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $g \in \mathscr{D}$ on doit démontrer que $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

On a : $\varphi(f+g) = 4(f+g)' - (f+g) = 4(f'+g') - f - g = 4f' - f + 4g' - g = \varphi(f) + \varphi(g)$

(2) Soit $f \in \mathscr{D}$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $\varphi(kf) = k\varphi(f)$

On a : $\varphi(kf) = 4(kf)' - (kf) = 4kf' - kf = k(4f' - f) = k\varphi(f)$

Conclusion : φ est linéaire.

Ex 5 On note $\mathscr{C}$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} &\longmapsto \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Démontrer que φ est linéaire.

On a : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

(1) Soit $f \in \mathscr{C}$ et $g \in \mathscr{C}$ on doit démontrer que $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

On a : $\varphi(f+g) = \displaystyle\int_0^1 (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(f) + \varphi(g)$

(2) Soit $f \in \mathscr{C}$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $\varphi(kf) = k\varphi(f)$

On a : $\varphi(kf) = \displaystyle\int_0^1 (kf)(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = k\varphi(f)$

Conclusion : φ est linéaire.

3. Exemples dans $\mathbb{R}^2$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (x, y) avec x et y réels.

On admet que $\mathbb{R}^2$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$ et que dans $\mathbb{R}^2$ on a les opérations suivantes :

- Pour $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x'\ ,\ y') \in \mathbb{R}^2$, on a $u + v = (x + x'\ ,\ y + y')$.
- Pour $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $k \in \mathbb{R}$, on a $ku = (kx\ ,\ ky)$.

Ex 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$f(x) = (3x\ ,\ -x)$

Démontrer que f est linéaire.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $f(x + x') = f(x) + f(x')$

On a : $f(x + x') = (3(x + x')\ ,\ -(x + x')) = (3x + 3x'\ ,\ -x - x') = (3x\ ,\ -x) + (3x'\ ,\ -x') = f(x) + f(x')$

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $f(kx) = kf(x)$

On a : $f(kx) = (3(kx)\ ,\ -(kx)) = (3kx\ ,\ -kx) = k(3x\ ,\ -x) = kf(x)$

Conclusion : f est linéaire.

Ex 7

On considère l'application suivante :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x\ ,\ y) = (2x\ ,\ x + y)$$

Démontrer que f est linéaire.

(1) Soit $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x'\ ,\ y') \in \mathbb{R}^2$ on doit démontrer que $f(u + u') = f(u) + f(u')$

On a :
$$\begin{aligned} f(u + u') = f(x + x'\ ,\ y + y') = (2(x + x')\ ,\ x + x' + y + y') &= (2x + 2x'\ ,\ x + y + x' + y') \\ &= (2x\ ,\ x + y) + (2x'\ ,\ x' + y') \\ &= f(x) + f(x') \end{aligned}$$

(2) Soit $u = (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ on doit démontrer que $f(ku) = kf(u)$

On a : $f(ku) = f(kx\ ,\ ky) = (2kx\ ,\ kx + ky) = (2kx\ ,\ k(x + y)) = k(2x\ ,\ x + y) = kf(u)$

Conclusion : f est linéaire.