Intégration par parties

1. Formule d'intégration par parties

Rappels :

1. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I : $(uv)' = u'v + uv'$ donc $u'v = (uv)' - uv'$
2. Si f est continue sur $[a\,;b]$ alors f admet des primitives sur $[a\,;b]$.
3. Si F est une primitive sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur $[a\,;b]$ telles que leur dérivée u' et v' sont continues.

1. On a : $u'v = (uv)' - uv'$
2. On a donc la formule (appelée « intégration par parties ») : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$

Remarque : cette formule permet

1. de ramener le calcul d'une intégrale que l'on ne sait pas calculer à une autre intégrale que l'on espère pouvoir calculer. (Dans la nouvelle intégrale, on a, la dérivée de l'une des fonctions, multipliée par une primitive de l'autre).
2. de trouver une relation entre deux intégrales notamment pour des intégrales dépendant d'un entier n. (Relation entre I_{n+1} et I_n).

2. Exercices

Ex 1 Calculer $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\ \mathrm{d}x$

Ex 2 Calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\ \mathrm{d}x$

Ex 3 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 1$.

A l'aide d'une intégration par parties, écrire une relation entre I_{n+1} et I_n.

Ex 4 Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln x)^n\ \mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 1$.

Démontrer que $3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3$.