Trigonométrie - Correction

Ex 1 Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

1. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x$$
$$=\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\cos x$$

$$\boxed{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x}$$

2. $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos x\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin x\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x\times\frac{-1}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x}$$

Ex 2 Réduire les expressions suivantes (en un sinus ou un cosinus) :

1. $A(x)=\sin(4x)\cos(7x)-\sin(7x)\cos(4x)$

$$\begin{aligned}A(x)&=\sin(4x)\cos(7x)-\sin(7x)\cos(4x)\\&=\sin a\cos b-\sin b\cos a\\&=\sin(a-b)\\&=\sin(4x-7x)\\&=\sin(-3x)\\&=\boxed{-\sin(3x)}\end{aligned}$$

2. $B(x)=\cos x\cos(2x)-\sin x\sin(2x)$

$$\begin{aligned}B(x)&=\cos x\cos(2x)-\sin x\sin(2x)\\&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\&=\cos(a+b)\\&=\cos(x+2x)\\&=\boxed{\cos(3x)}\end{aligned}$$

3. $C(x)=\cos(2x)\sin(3x)+\cos(3x)\sin(2x)$

$$\begin{aligned}C(x)&=\cos(2x)\sin(3x)+\cos(3x)\sin(2x)\\&=\sin(3x)\cos(2x)+\sin(2x)\cos(3x)\\&=\sin a\cos b+\sin b\cos a\\&=\sin(a+b)\\&=\sin(3x+2x)\\&=\boxed{\sin(5x)}\end{aligned}$$

Ex 3 Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{\cos x+\sin x}$$

Ex 4

1. Vérifier que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

On a : $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\\ &= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

2. Vérifier que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ puis calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

On a : $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12}$

donc
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

Que remarquez-vous ?

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Comment aurait-on pu trouver la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ à partir de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$?

On a : $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{6\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2}$

donc les angles $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$ sont complémentaires donc le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.

donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

D'après la remarque précédente : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

Ex 5 a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos a = \dfrac{3}{5}$ et $\sin b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\sin a$ et $\cos b$.

- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

⚠ $a \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin a > 0$ donc $\sin a = \sqrt{\dfrac{16}{25}}$ donc $\boxed{\sin a = \dfrac{4}{5}}$

- $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$ donc $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

⚠ $b \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos b > 0$ donc $\cos b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ donc $\boxed{\cos b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

2. En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &= \boxed{\frac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b \cos a\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{5}\\ &= \boxed{\frac{4\sqrt{2}+3}{5\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Ex 6

1. Sachant que $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$, calculer $\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 2\times\frac{3}{9} - 1\\ &= \boxed{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

2. Sachant que $\sin x = \dfrac{-1}{3}$, calculer $\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ &= 1 - 2\times\frac{1}{9}\\ &= \boxed{\frac{7}{9}}\end{aligned}$$

3. Soit un réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{1}{5}$. Calculer $\sin(2x)$.

- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
- Calcul de $\cos x$: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$

⚠ $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ donc $\cos x < 0$ donc $\cos x = -\sqrt{\dfrac{24}{25}}$ donc $\boxed{\cos x = \dfrac{-2\sqrt{6}}{5}}$

- Conclusion : $\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{-2\sqrt{6}}{5}$ donc $\boxed{\sin(2x) = \dfrac{-4\sqrt{6}}{25}}$

Ex 7 a est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ tel que $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Calculer $\cos(2a)$ puis en déduire la valeur de a.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(2a) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ex 8 a est un réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

1. Démontrer que $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$.

$$(\cos a + \sin a)^2 = \cos^2 a + 2\cos a \sin a + \sin^2 a = 1 + 2\sin a\cos a = \boxed{1+\sin(2a)}$$

2. En déduire que $\dfrac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$

$$\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos 2a} = \frac{(\cos a+\sin a)^2}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{(\cos a+\sin a)^2}{(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)} = \boxed{\frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}}$$

3. Déduire de la question précédente la valeur de $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1+\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Ex 9 Soit x un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Démontrer que $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x\cos x - \sin x\cos 3x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \frac{\sin(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \boxed{2}$$