

Trigonométrie

1.

Formules à connaître par cœur

- Pour tout réel a : $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ $\underbrace{\cos(-a) = \cos a \quad \sin(-a) = -\sin a}_{\text{formules à retrouver à l'aide du cercle trigonométrique}}$
- Pour tout réel a et b : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- Pour tout réel a : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
 $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$
 $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$

Idées de démonstration : $\sin(a - b) = \sin(a + (-b))$ $\sin(2a) = \sin(a + a)$
 $\cos(a - b) = \cos(a + (-b))$ $\cos(2a) = \cos(a + a)$

2.

Exercices

Ex 1 Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

Ex 2 Réduire les expressions suivantes (en un sinus ou cosinus) :

1. $A(x) = \sin(4x) \cos(7x) - \sin(7x) \cos(4x)$
2. $B(x) = \cos x \cos(2x) - \sin x \sin(2x)$
3. $C(x) = \cos(2x) \sin(3x) + \cos(3x) \sin(2x)$

Ex 3 Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} , on a : $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

Ex 4

1. Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2. Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ puis calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Que remarquez-vous? Comment aurait-on pu trouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à partir de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$?

Déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Ex 5 a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\sin a$ et $\cos b$.

2. En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Ex 6

1. Sachant que $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, calculer $\cos(2x)$.

2. Sachant que $\sin x = \frac{-1}{3}$, calculer $\cos(2x)$.

3. Soit un réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{1}{5}$.

Calculer $\sin(2x)$.

Ex 7 a est un réel de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Calculer $\cos(2a)$ puis en déduire la valeur de a .

Ex 8 a est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

1. Démontrer que $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$.

2. En déduire que $\frac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$

3. Déduire de la question précédente la valeur de $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

Ex 9 Soit x un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$