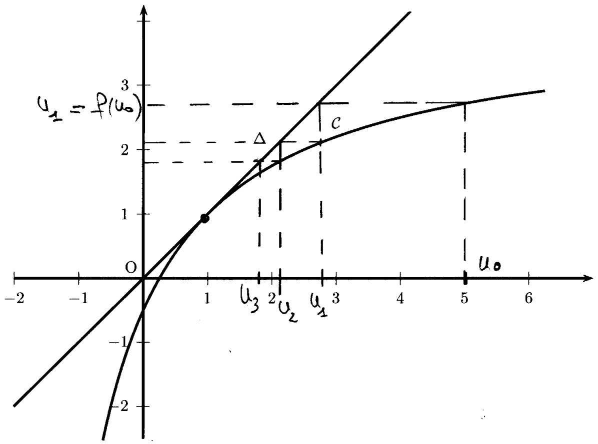
DM guidé Suites n°1

1a)



1b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante et converge vers 1

2) On note P_n la propriété $u_n - 1 > 0$ pour $n \geq 0$

- Initialisation : $u_0 - 1 = 4 > 0$ donc $P(0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq 0$

On suppose que $P(n)$ est vraie càd $u_n - 1 > 0$
et on va montrer que $P(n+1)$ est vraie càd $u_{n+1} - 1 > 0$.

$$\text{On a } u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

On a $u_n - 1 > 0$ donc $3(u_n - 1) > 0$.
D'après $u_n - 1 > 0$ on a $u_n > 1$
donc $u_n + 2 > 3 > 0$

Donc $\dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$ càd $u_{n+1} - 1 > 0$
et $P(n+1)$ est vraie

- Conclusion :

$P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

b) Montrons que (u_n) est décroissante.

$$\text{On a } u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}$$

$$= \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} \qquad \text{Signe ?}$$

On a $u_n - 1 > 0$ donc $u_n > 1$ et $u_n + 2 > 3 > 0$.
$\boxed{u_n + 2 > 0}$

Signe de $-u_n^2 + 2u_n - 1$?
On reconnait un trinôme du type
$-x^2 + 2x - 1$
Racines ? $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 1$	$-$	0	$-$

donc $-u_n^2 + 2u_n - 1 \leq 0$

Donc $\dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} \leq 0$

càd $u_{n+1} - u_n \leq 0$
et la suite (u_n) est décroissante

Rmq : ⊕ rapide ! $-u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n^2 - 2u_n + 1)$
$= -(u_n - 1)^2 \leq 0$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

La suite (U_n) est décroissante avec $U_n - 1 > 0$
c.a.d $U_n > 1$
et donc (U_n) minorée.

La suite (U_n) est donc convergente

On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

D'après $U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{U_n + 2}$

Par passage à la limite on a :

$$l = \frac{4l-1}{l+2}$$

$$l(l+2) = 4l - 1$$

$$l^2 + 2l = 4l - 1$$

$$l^2 - 2l + 1 = 0$$

$$(l-1)^2 = 0$$

$$\boxed{l = 1}$$

La limite est bien égale à 1.

3) $U_0 = 5 \qquad U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{U_n + 2} \qquad n \geq 0$

$$V_n = \frac{1}{U_n - 1}$$

a) $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4U_n - 1}{U_n + 2} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4U_n - 1 - U_n - 2}{U_n + 2}}$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + 2}{3U_n - 3}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 2}{3U_n - 3} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n + 2 - 3}{3U_n - 3}$$

$$= \frac{U_n - 1}{3(U_n - 1)}$$

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + \dfrac{1}{3}}$

b) $V_n = V_0 + nr$ $\qquad V_0 = \dfrac{1}{U_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty}$$

On a $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ donc $U_n - 1 = \dfrac{1}{V_n}$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{V_n} + 1}$$

c) donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$