Droites dans l'espace
(représentations paramétriques)

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Ex 1 Soient deux points $A\ (-1\,;\,2\,;\,1)$ et $B\ (0\,;\,-2\,;\,3)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\ (1\,;\,-4\,;\,2)$ est un vecteur directeur de la droite.

En considérant le point A, la droite (AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+k \\ y & = & 2-4k \\ z & = & 1+2k \end{array}\right.\quad, k \in \mathbb{R}$

On peut aussi considérer le point B et donner la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & -2-4k \\ z & = & 3+2k \end{array}\right.\quad, k \in \mathbb{R}$

Remarque : dans ce dernier cas, le point A correspond à $k=-1$ et B à $k=0$.

Ex 2 Soit la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3k \\ y & = & 1+k \\ z & = & -4-k \end{array}\right.\quad, k \in \mathbb{R}$

1. Donner un vecteur directeur de (d).

Le vecteur de coordonnées $(-3\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la droite.

(Coefficients associés au paramètre k)

2. Donner deux points de (d).

À chaque valeur de k choisie, correspond un point de la droite.

Par exemple, pour $k=0$ on a le point A de coordonnées $(0\,;\,1\,;\,-4)$ et pour $k=1$ on a le point B de coordonnées $(-3\,;\,2\,;\,-5)$.

3. Le point R de coordonnées $(-6\,;\,0\,;\,-2)$ appartient-il à (d) ?

$x=-6$ donne $k=2$ et $y=2$ donne $k=-1$.

On a deux valeurs différentes de k ce qui signifie que le point n'appartient pas à la droite.

Remarque : dans le cas où les deux valeurs de k sont les mêmes pour x et y, il faut alors calculer le k associé à z pour conclure.

4. Déterminer les coordonnées du point S appartenant à (d) d'ordonnée -6.

$y=-6$ correspond à $k=-7$. On calcule alors x et y pour cette valeur de k.

On a $x=21$ et $z=3$ donc S a pour coordonnées $\boxed{(21\,;\,-6\,;\,3)}$.

5. Vérifier que $\begin{cases} x = -6-6t \\ y = 3+2t \\ z = -6-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une autre représentation paramétrique de la droite (d).

On note (Δ) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -6-6t \\ y = 3+2t \\ z = -6-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Il suffit de vérifier que les droites (d) et (Δ) ont deux points en commun pour conclure que ces deux droites sont confondues.

Les points $A\ (0\,;\,1\,;\,-4)$ et $B\ (-3\,;\,2\,;\,-5)$ appartiennent à (d). Vérifions qu'ils appartiennent à (Δ).

A appartient à (Δ) car correspond à $t=-1$ et B appartient à (Δ) car correspond à $t=\frac{-1}{2}$.

Méthode 2 : On peut aussi montrer que (d) et (Δ) sont parallèles (vecteurs directeurs colinéaires) et qu'elles ont un point commun.

Vecteur directeur de (d) : $\overrightarrow{u}\ (-3\,;\,1\,;\,-1)$

Vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{v}\ (-6\,;\,2\,;\,-2)$.

On a $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{u}$ donc les vecteurs sont colinéaires et donc les droites sont parallèles.

Le point $A\ (0\,;\,1\,;\,-4)$ appartient à (d) et aussi à (Δ).

Conclusion : les deux droites sont confondues donc la représentation paramétrique donnée est bien une représentation paramétrique de la droite (d).

Ex 3

Soient deux points $E\ (2\,;-3\,;5)$ et $H\ (1\,;-8\,;8)$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 4-k \\ z = -2+2k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -3-5t \\ z = 5+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (EH).

Les coordonnées de E vérifient bien les trois conditions pour $t=0$ et les coordonnées de H vérifient bien les trois conditions pour $t=1$ donc cette représentation paramétrique définie bien la droite (EH).

2. Démontrer que les droites (d) et (EH) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Si le système $\begin{cases} 1+k = 2-t \\ 4-k = -3-5t \\ -2+2k = 5+3t \end{cases}$ d'inconnues k et t a bien une solution unique pour k et t alors cela prouvera que les droites sont sécantes et la valeur de k ou t donnera les coordonnées du point d'intersection.

Le système s'écrit $\begin{cases} k+t &= 1 \\ -k+5t &= -7 \\ 2k-3t &= 7 \end{cases}$

• On commence par résoudre le système formé des deux premières équations $\begin{cases} k+t &= 1 \\ -k+5t &= -7 \end{cases}$

Par addition des deux équations on obtient : $6t = -6$ et donc $t = -1$.

Par substitution de t par -1 dans la première équation, on en déduit $k = 2$.

• On regarde si les valeurs de $k = 2$ et $t = -1$ conviennent, c'est-à-dire si elles vérifient la troisième équation.

On a : $2k - 3t = 4 + 3 = 7$ ce qui valide la troisième équation et donc assure que le système de départ a bien comme solution $\boxed{k = 2}$ et $\boxed{t = -1}$ et prouve donc que les droites sont sécantes.

• Pour $k = 2$, on a $x = 3$, $y = 2$ et $z = 2$.

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $\boxed{(3\,;\,2\,;\,2)}$.

• Vérification : avec $t = -1$, on trouve aussi $(3\,;\,2\,;\,2)$.