# Plans dans l'espace

## (représentations paramétriques ou équations cartésiennes)

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé.

**Ex 1** Soient trois points $A\ (1\,;\,1\,;\,-2)$, $B\ (1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\ (3\,;\,1\,;\,4)$.

**1.** Démontrer que les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.

Il faut vérifier que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\ (0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AC}\ (2\,;\,0\,;\,6)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés et déterminent un plan que l'on note $(ABC)$.

**2.** Déterminer une représentation paramétrique du plan $(ABC)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan $(ABC)$ (car vecteurs non colinéaires).

Le plan $(ABC)$ a pour représentation paramétrique (par exemple, en considérant le point $A$) $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+k \\ z &=& -2+k+6t \end{array}\right.\quad, k,t\in\mathbb{R}$ .

**Ex 2** Soit la droite $(d)$ passant par $M\ (4\,;\,1\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\ (2\,;\,-5\,;\,11)$

et le plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2k-t \\ y &=& 3k+4t \\ z &=& -5+k+2t \end{array}\right.\quad, k,t\in\mathbb{R}$ .

**1.** Le point $B\ (1\,;\,-2\,;\,1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$ ?

Le point $B$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient le système de représentation paramétrique du plan c'est-à-dire si le système $\left\{\begin{array}{lcl} 3+2k-t &=& 1 \\ 3k+4t &=& -2 \\ -5+k+2t &=& 1 \end{array}\right.$ a une solution pour $k$ et $t$.

• Le système s'écrit $\left\{\begin{array}{lcl} 2k-t &=& -2 \\ 3k+4t &=& -2 \\ k+2t &=& 6 \end{array}\right.$

• On commence par résoudre le système formé des deux premières équations $\left\{\begin{array}{lcl} 2k-t &=& -2 \\ 3k+4t &=& -2 \end{array}\right.$

On multiplie la première équation par 4, le système devient $\left\{\begin{array}{lcl} 8k-4t &=& -8 \\ 3k+4t &=& -2 \end{array}\right.$.

Par addition des deux lignes on obtient $11k = -10$ et donc $k = \dfrac{-10}{11}$.

Par substitution de $k$ par $\dfrac{-10}{11}$ dans la première équation $2k - t = -2$, on en déduit $t = 2k + 2 = \dfrac{-20}{11} + 2 = \dfrac{2}{11}$.

• On regarde si les valeurs $k = \dfrac{-10}{11}$ et $t = \dfrac{2}{11}$ conviennent, c'est-à-dire si elles vérifient la troisième équation.

On a : $k + 2t = \dfrac{-10}{11} + \dfrac{4}{11} = \dfrac{-6}{11} \neq 6$

donc le système de départ n'a pas solution pour $k$ et $t$ et cela prouve que le point $B$ n'appartient pas au plan.

**2.** Donner deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Par lecture du système de représentation paramétrique du plan, on en déduit deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\,(2\,;3\,;1)$ (coefficients du paramètre $k$) et $\overrightarrow{v}\,(-1\,;4\,;2)$ (coefficients du paramètre $t$) .

**3.** Démontrer que la droite $(d)$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan, ce qui en terme de vecteurs revient à démontrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Vecteur directeur de la droite $(d)$ : $\overrightarrow{w}\,(2\,;-5\,;11)$

Vecteurs non colinéaires du plan : $\overrightarrow{u}\,(2\,;3\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\,(-1\,;4\,;2)$.

On a : $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = 4 - 15 + 11 = 0$ donc $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$

On a : $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} = -2 - 20 + 22 = 0$ donc $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$

Conclusion : la droite $(d)$ est donc perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

**4.** Déduire de la question précédente une équation du plan $\mathcal{P}$.

• La droite $(d)$ étant perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{w}\,(2\,;-5\,;11)$ (vecteur directeur de la droite) est normal au plan.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne du type $2x - 5y + 11z + d = 0$

• Pour déterminer la valeur de $d$, on utilise un point du plan $\mathcal{P}$ que l'on déduit du système de représentation paramétrique du plan. Soit le point $T\,(3\,;0\,;-5)$ (pour $k = 0$ et $t = 0$).

Les coordonnées de $T$ vérifient l'équation cartésienne du plan donc $6 - 0 - 55 + d = 0$ et donc $d = 49$.

Conclusion : le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $\boxed{2x - 5y + 11z + 49 = 0}$.

• Vérification : $2x - 5y + 11z - 49 = 2(3 + 2k - t) - 5(3k + 4t) + 11(-5 + k + 2t) - 49$

$$= 6 + 4k - 2t - 15k - 20t - 55 + 11k + 22t + 49$$

$$= 0$$

**Ex 3**

Soit la droite $(d)$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 4-k \\ z = -2+2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 4z + 1 = 0$

**1.** Le point $A$ de coordonnées $(3\,;\,5\,;\,-1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$ ?

Le point $A$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

On a : $2x - y + 4z + 1 = 6 - 5 - 4 + 1 = -2 \neq 0$ donc $A$ n'appartient pas au plan.

**2.** Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On déduit directement à partir de l'équation cartésienne du plan que le vecteur $\overrightarrow{n}\ (2\,;\,-1\,;\,4)$ est normal au plan.

**3.** A l'aide du vecteur normal trouvé précédemment, démontrer que la droite $(d)$ coupe le plan $\mathcal{P}$.

Pour démontrer que la droite $(d)$ coupe le plan, il suffit de montrer que la droite n'est pas parallèle au plan.

Pour cela, il suffit de vérifier qu'un vecteur directeur de $(d)$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$.

Vecteur directeur de $(d)$ : $\overrightarrow{u}\ (1\,;\,-1\,;\,2)$ (coefficients du paramètre $k$).

On a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 2 + 1 + 8 = 11 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux et la droite $(d)$ coupe donc le plan $\mathcal{P}$.

**4.** Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Le point d'intersection appartient à la fois à $\mathcal{P}$ et à la droite $(d)$ donc ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de $(d)$ et l'équation de $\mathcal{P}$.

Par substitution de $x$, $y$ et $z$ dans l'équation du plan, on a $2(1+k) - (4-k) + 4(-2+2k) + 1 = 0$.

donc $2 + 2k - 4 + k - 8 + 8k + 1 = 0$ et donc $11k - 9 = 0$ et donc $\boxed{k = \dfrac{9}{11}}$

On en déduit alors $x = 1 + k = 1 + \dfrac{9}{11} = \dfrac{20}{11}$ ;  $y = 4 - k = 4 - \dfrac{9}{11} = \dfrac{35}{11}$  et  $z = -2 + 2k = -2 + \dfrac{18}{11} = \dfrac{-4}{11}$

Conclusion : le point d'intersection a pour coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{20}{11}\,;\,\dfrac{35}{11}\,;\,\dfrac{-4}{11}\right)}$

**Ex 4** Soit le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $-x + 6y + z - 1 = 0$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x - 5y + 3z - 2 = 0$

**1.** Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ et un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$ puis en déduire que les plans sont sécants.

Vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ : $\overrightarrow{n_1}\ (-1\,;\,6\,;\,1)$

Vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ : $\overrightarrow{n_2}\ (2\,;\,-5\,;\,3)$

Deux plans sont sécants s'ils ne sont pas parallèles.

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{6}{-5}$, donc les plans sont sécants.

**2.** Déterminer l'intersection de ces deux plans.

L'intersection des deux plans est une droite dont les coordonnées des points vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} -x+6y+z-1 & = & 0 \\ 2x-5y+3z-2 & = & 0 \end{array}\right.$

• Ce système a deux équations et trois inconnues.

On se ramène à un système $2\times 2$ en considérant comme inconnues principales $x$ et $y$ et : $\left\{\begin{array}{rcl} -x+6y & = & 1-z \\ 2x-5y & = & 2-3z \end{array}\right.$

L'objectif est d'exprimer $x$ et $y$ en fonction de $z$.

• On multiplie la première équation par 2, le système devient $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+12y & = & 2-2z \\ 2x-5y & = & 2-3z \end{array}\right.$

Par addition des deux lignes on obtient $7y = 4-5z$ et donc $\boxed{y = \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z}$

Par substitution de $y$ par $y = \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z$ dans la première équation $-x+6y = 1-z$

on a $-x + 6\left(\dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z\right) = 1-z$

donc $-x + \dfrac{24}{7} - \dfrac{30}{7}z = 1-z$

donc $-x = 1 - \dfrac{24}{7} - z + \dfrac{30}{7}z$

soit $-x = \dfrac{-17}{7}z + \dfrac{23}{7}$ et donc $\boxed{x = \dfrac{-23}{7} + \dfrac{17}{7}z}$

• On pose alors $\boxed{z = k}$ ($k$ réel) et le système initial a donc pour solution : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-23}{7} + \dfrac{17}{7}k \\ y & = & \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}k \\ z & = & k \end{array}\right. , k \in \mathbb{R}$

• On reconnait la représentation paramétrique d'une droite.

La droite d'intersection des deux plans est donc la droite passant par le point $M\left(\dfrac{-23}{7}\ ;\ \dfrac{4}{7}\ ;\ 0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\left(\dfrac{17}{7}\ ;\ \dfrac{-5}{7}\ ;\ 1\right)$

• Vérification : pour $k=1$, on a le point $A\left(\dfrac{-6}{7};\dfrac{-1}{7};1\right)$

Ce point appartient à $\mathcal{P}_1$ car $-x+6y+z-1 = \dfrac{6}{7} - \dfrac{6}{7} + 1 - 1 = 0$

Ce point appartient à $\mathcal{P}_2$ car $2x-5y+3z-2 = \dfrac{-12}{7} + \dfrac{5}{7} + 3 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$