Suites

1. Suites définies par une relation de récurrence

Définition :

Cas particuliers :

- La suite (U_n) est géométrique de raison q (q nombre réel) si pour tout entier n $\quad U_{n+1} = U_n \times q$
- La suite (U_n) est arithmétique de raison r (r nombre réel) si pour tout entier n $\quad U_{n+1} = U_n + r$

Propriété :

Expression de U_n en fonction de n :

- Si (U_n) est géométrique de raison q et de premier terme U_0 alors $\quad U_n = U_0 \times q^n$
- Si (U_n) est arithmétique de raison r et de premier terme U_0 alors $\quad U_n = U_0 + nr$

Propriété :

Calcul de $U_0 + U_1 + \cdots + U_n$:

- Si (U_n) est géométrique de raison q alors $\quad U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si (U_n) est arithmétique de raison r alors $\quad U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \dfrac{(U_0 + U_n) \times (n+1)}{2}$

Remarque : $n+1$ correspond au nombre de termes dans la somme.

2. Sens de variation d'une suite

Propriété :

Pour étudier les variations d'une suite, on peut chercher le signe de $U_{n+1} - U_n$.

- Si $U_{n+1} - U_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ alors la suite (U_n) est croissante à partir du rang n_0.
- Si $U_{n+1} - U_n < 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ alors la suite (U_n) est décroissante à partir du rang n_0.

3. Exercices

Ex 1 Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n - 4(n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Calculer U_2 et U_3

Ex 2 Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -5$, $U_1 = 2$ et $U_{n+2} = U_n - \dfrac{2U_{n+1}}{n+3}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Calculer U_2 et U_3

Ex 3 Soit la suite (U_n) arithmétique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $U_0 = -4$.

1. Calculer U_{20}.
2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_{20}$

Ex 4 Soit la suite (U_n) géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 8$.

1. Calculer U_9.
2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$

Ex 5 Soit une suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = U_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Exprimer U_n en fonction de n.
2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$

Ex 6 Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3U_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer U_7
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_7$.

Ex 7

1. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{-5n+2}{3}$ est une suite arithmétique.
2. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{2\sqrt{5}}{3^n}$ est une suite géométrique.

Ex 8 Étudier les variations des suites ci-dessous :

1. (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + n - 12$ pour tout entier naturel n.
2. (U_n) définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.
3. (U_n) définie par $U_n = 2^n - n$ pour tout entier naturel n.