Calculs préparatoires pour le raisonnement par récurrence

Exercice 1 Exprimer en fonction de q^n :

1. q^{n+1}

Réponse : $\boxed{q^{n+1} = q^n \times q}$

2. q^{2n}

Réponse : $\boxed{q^{2n} = (q^n)^2}$

3. $q^{n+1} - q^n$

Réponse : $\boxed{q^{n+1} - q^n = q^n\,(q-1)}$

Exercice 2 Soit n un entier. Mettre sous la forme $a \times b^n$ avec a et b réels :

1. 3^{3n+1}

On a : $3^{3n+1} = 3^{3n} \times 3 = \left(3^3\right)^n \times 3 = 27^n \times 3$

Réponse : $\boxed{3^{3n+1} = 3 \times 27^n}$

2. 5^{2n-1}

On a : $5^{2n-1} = \dfrac{5^{2n}}{5} = \dfrac{\left(5^2\right)^n}{5} = \dfrac{25^n}{5} = \dfrac{1}{5} \times 25^n$

Réponse : $\boxed{5^{2n-1} = \dfrac{1}{5} \times 25^n}$

3. $(-1)^n \times 2^{n+1}$

On a : $(-1)^n \times 2^{n+1} = (-1)^n \times 2^n \times 2 = (-1 \times 2)^n \times 2 = (-2)^n \times 2$

Réponse : $\boxed{(-1)^n \times 2^{n+1} = 2 \times (-2)^n}$

4. $\dfrac{2}{3^n}$

On a : $\dfrac{2}{3^n} = 2 \times \dfrac{1}{3^n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Réponse : $\boxed{\dfrac{2}{3^n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

5. $\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n}$

On a : $\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n} = \dfrac{5 \times \left(2^3\right)^n}{7^n} = \dfrac{5 \times 8^n}{7^n} = 5 \times \dfrac{8^n}{7^n} = 5 \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^n$

Réponse : $\boxed{\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n} = 5 \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^n}$

6. $\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}}$

On a : $\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = \dfrac{2^n \times 2}{5^n \times 5^{-2}} = \dfrac{2^n \times 2 \times 5^2}{5^n} = 50 \times \dfrac{2^n}{5^n} = 50 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

Réponse : $\boxed{\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = 50 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Exercice 3 Exprimer U_{n+1} en fonction de n dans les cas suivants :

1. $U_n = 2n^2 - 3$

On a : $U_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3 = 2(n^2+2n+1) - 3 = 2n^2+4n+2-3 = 2n^2+4n-1$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = 2n^2 + 4n - 1}$

2. $U_n = 2^{2n-1}$

On a : $U_{n+1} = 2^{2(n+1)-1} = 2^{2n+1}$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = 2^{2n+1}}$

3. $U_n = \dfrac{n-1}{3-n}$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{n+1-1}{3-(n+1)} = \dfrac{n}{2-n}$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = \dfrac{n}{2-n}}$

Exercice 4

1. Pour $n \geqslant 1$, soit $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$.

Démontrer que si $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors on a $V_n = U_{n+1}$

Réponse :

$$\text{On a : } V_n = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \boxed{U_{n+1}}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n}$.

Démontrer que si $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$, alors on a $V_n = U_{n+1}$

Réponse :

On a :

$$V_n = \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \boxed{\frac{2}{2n+3}}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \boxed{\frac{2}{2n+3}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{V_n = U_{n+1}}$$

Exercice 5 Soit une suite (U_n) vérifiant pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = 2U_n - n - 1$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $U_n = 2(2^{n-1}+1)+n$.

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

Réponse :

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on va démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $U_n = 2(2^{n-1}+1)+n$, on va démontrer que

$U_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1$.

On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2U_n - n - 1 \\ &= 2\left[2(2^{n-1}+1)+n\right] - n - 1 \\ &= 2\left[2^n+2+n\right] - n - 1 \\ &= 2\left(2^n\right) + 4 + 2n - n - 1 \\ &= \boxed{2^{n+1}+n+3} \end{aligned}$$

On a :

$$2(2^n+1)+n+1 = 2^{n+1}+2+n+1 = \boxed{2^{n+1}+n+3}$$

On a donc bien :

$$\boxed{U_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1}$$

Conclusion : $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

Exercice 6 Soit une suite (U_n) vérifiant pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = 10U_n + 21$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $3U_n = 10^{n+1} - 7$.

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

Réponse :

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on va démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $3U_n = 10^{n+1} - 7$, on va démontrer que $3U_{n+1} = 10^{n+2} - 7$.

On a :

$$\boxed{3U_{n+1}} = 3\left[10U_n + 21\right] = 10 \times 3U_n + 63 = 10 \times \left(10^{n+1} - 7\right) + 63$$

$$= 10^{n+2} - 70 + 63 = \boxed{10^{n+2} - 7}$$

Conclusion : $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.