Suites

Exercice 1 Calculs de termes d'une suite.

1. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

$U_{n+1} = 2U_n - 1$. Calculer U_2

Il est nécessaire de calculer U_1 pour avoir U_2

On a : $U_1 = 2U_0 - 1 = 5$ puis $U_2 = 2U_1 - 1 = 9$

Réponse : $\boxed{U_2 = 9}$

2. Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -4$ et pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = nU_n + 6$. Calculer U_1, U_2 et U_3

On a : $U_1 = 0 \times U_0 + 6 = 6$

puis $U_2 = 1 \times U_1 + 6 = 12$

puis $U_3 = 2 \times U_2 + 6 = 30$

Réponse : $\boxed{U_1 = 6\ ;\ U_2 = 12\ ;\ U_3 = 30}$

3. Soit la suite (V_n) définie par $V_0 = 2$, $V_1 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$V_{n+2} = (n-2)V_{n+1} - V_n$. Calculer V_2

On a : $V_2 = -2V_1 - V_0 = -8 - 2 = -10$

Réponse : $\boxed{V_2 = -10}$

Exercice 2 Donner une expression de S_{n+1} en fonction de n dans les cas suivants :

1. $S_n = \dfrac{2n-1}{3}$

$S_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{3} = \dfrac{2n+1}{3}$

Réponse : $\boxed{S_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3}}$

2. $S_n = 3n^2 - n$

$S_{n+1} = 3(n+1)^2 - (n+1) = 3(n^2 + 2n + 1) - n - 1 = 3n^2 + 5n + 2$

Réponse : $\boxed{S_{n+1} = 3n^2 + 5n + 2}$

3. $S_n = (3n-1)^2$

$S_{n+1} = (3(n+1) - 1)^2 = (3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$

Réponse : $\boxed{S_{n+1} = 9n^2 + 12n + 4}$

Exercice 3 Soit la suite (W_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par

$$W_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Calculer W_3

$W_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

Réponse : $\boxed{W_3 = \dfrac{5}{6}}$

2. Exprimer W_5 en fonction de W_3 puis en déduire W_5

$W_5 = W_3 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$ donc $\boxed{W_5 = W_3 + \dfrac{9}{20}}$ donc $W_5 = \dfrac{5}{6} + \dfrac{9}{20} = \dfrac{50+27}{60} = \dfrac{77}{60}$

Réponse : $\boxed{W_5 = \dfrac{77}{60}}$

3. Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n.

Réponse : $\boxed{W_{n+1} = W_n + \dfrac{1}{n+1}}$

Exercice 4 Soit la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$S_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1}$$

1. Calculer S_2.

$S_2 = 2^2 + 2 \times 2^3 = 4 + 16 = 20$

Réponse : $\boxed{S_2 = 20}$

2. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

Réponse : $\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+2}}$

Exercice 5 Utiliser la notation $\sum$ pour définir les sommes suivantes :

1. $W_n = \dfrac{1}{2-3} + \dfrac{1}{2-4} + \dfrac{1}{2-5} + \cdots + \dfrac{1}{2-n}$ pour $n \geqslant 3$

Réponse : $\boxed{W_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2-k}}$

2. $S_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1}$ pour $n \geqslant 1$

Réponse : $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k+1}}$

Exercice 6 Reconnaitre des suites arithmétiques ou géométriques parmi les cas suivants :

1. $U_{n+1} = U_n - \sqrt{2}$	**4.** $U_{n+1} = 5 - U_n$	**7.** $U_{n+1} = U_n + n$
2. $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$	**5.** $U_{n+1} = -U_n$	**8.** $U_{n+1} = 3U_n - 1$
3. $U_{n+1} = -4 + U_n$	**6.** $U_{n+1} = U_n \times 2n$	

Réponse : $\boxed{\textbf{1.}, \textbf{2.}, \textbf{3.}, \textbf{5.}}$ En effet :

1. $U_{n+1} = U_n - \sqrt{2}$ Suite arithmétique de raison $-\sqrt{2}$

2. $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3}$ Suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ car $U_{n+1} = U_n \times \dfrac{1}{3}$

3. $U_{n+1} = -4 + U_n$ Suite arithmétique de raison -4 car $U_{n+1} = U_n - 4$

5. $U_{n+1} = -U_n$ Suite géometrique de raison -1 car $U_{n+1} = U_n \times (-1)$

Les autres suites ne peuvent pas s'écrire sous la forme $U_{n+1} = U_n + r$ ou $U_{n+1} = U_n \times q$ avec r et q constants.

Exercice 7 Déterminer le nombre de termes dans les sommes suivantes :

1. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$

Remarque : si on a $U_1 + \cdots + U_{12}$, on va de 1 à 12 donc 12 termes, auquel on rajoute le terme U_0, soit un terme de plus.

Réponse : $\boxed{\text{13 termes}}$

2. $U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{30}$

Remarque : si on a $U_1 + \cdots + U_{30}$, on va de 1 à 30 donc 30 termes, auxquels on retire les termes $U_1, \ldots, U_9$ soit 9 termes en moins donc un total de $30 - 9 = 21$.

Réponse : $\boxed{\text{21 termes}}$

3. $2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$

Remarque : on a : $2^1 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$, on va de 1 à 40 donc 40 termes

Réponse : $\boxed{\text{40 termes}}$

4. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{25}$

Remarque : si on a : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{25}$, on va de 1 à 25 soit 25 termes, on retire les termes $\sqrt{1}$ et $\sqrt{2}$ soit deux termes en moins donc au total 23 termes.

Réponse : $\boxed{\text{23 termes}}$