Calculs Terminale et Prépa

Exercice 1 Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple :

1. $A = \frac{a}{b} \times \frac{2}{b}$

Réponse : $\boxed{A = \frac{2a}{b^2}}$

2. $B = a \times \frac{3a}{b}$

Réponse : $\boxed{B = \frac{3a^2}{b}}$

3. $C = \dfrac{1}{\dfrac{a-b}{a}}$

Réponse : $\boxed{C = \frac{a}{a-b}}$ ⚠ Pas de simplification possible !

4. $D = \frac{a+1}{ab} - \frac{2+b}{b^2}$

$$D = \frac{b(a+1) - a(2+b)}{ab^2} = \frac{ab + b - 2a - ab}{ab^2}$$

Réponse : $\boxed{D = \frac{b-2a}{ab^2}}$ ⚠ Pas de simplification possible !

5. $E = \frac{2}{n} + \frac{n-1}{n+1}$

$$E = \frac{2(n+1) + n(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2n + 2 + n^2 - n}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + n}$$

Réponse : $\boxed{E = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + n}}$ ⚠ Pas de simplification possible !

6. $F = b \times \left(\frac{2}{b} + 2\right)^2$

$$F = b \times \left(\frac{4}{b^2} + 2 \times \frac{2}{b} \times 2 + 4\right) = b \times \left(\frac{4}{b^2} + \frac{8}{b} + 4\right) = \frac{4}{b} + 8 + 4b$$

Réponse : $\boxed{F = \frac{4}{b} + 4b + 8}$

7. $G = \dfrac{\dfrac{2}{x}}{x}$

$$G = \frac{2}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}$$

Réponse : $\boxed{G = \frac{2}{x^2}}$

8. $H = \dfrac{\dfrac{4a}{3}}{a}$

$$H = \frac{4a}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{4}{3}$$

Réponse : $\boxed{H = \frac{4}{3}}$

9. $I=\dfrac{4a+\frac{1}{2}}{\frac{a}{4}+1}$

$$I=\dfrac{\frac{8a+1}{2}}{\frac{a+4}{4}}=\frac{8a+1}{2}\times\frac{4}{a+4}=\frac{2(8a+1)}{a+4}=\frac{16a+2}{a+4}$$

Réponse : $\boxed{I=\dfrac{16a+2}{a+4}}$ ⚠ Pas de simplification possible !

Exercice 2 Simplifier si possible les expressions suivantes :

1. $A=\dfrac{2a+3}{2}$

Réponse : $\boxed{A=\dfrac{2a+3}{2}}$ ou Réponse : $\boxed{A=a+\dfrac{3}{2}}$

2. $B=\dfrac{6-a}{6+3a}$ ⚠ Pas de simplification possible !

3. $C=\dfrac{6}{6+3a}=\dfrac{3\times 2}{3(2+a)}=\dfrac{2}{2+a}$ ⚠ Pour simplifier, il faut pouvoir factoriser le même terme au numérateur et au dénominateur !

Réponse : $\boxed{C=\dfrac{2}{2+a}}$

4. $D=\dfrac{b^2+b}{b^2+2b}=\dfrac{b(b+1)}{b(b+2)}=\dfrac{b+1}{b+2}$

Réponse : $\boxed{D=\dfrac{b+1}{b+2}}$ On ne peut pas simplifier davantage !

5. $E=\dfrac{n^2-1}{n(n-1)}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)}=\dfrac{n+1}{n}$

Réponse : $\boxed{E=\dfrac{n+1}{n}}$ ou Réponse : $\boxed{E=1+\dfrac{1}{n}}$

6. $F=\dfrac{2x^2-2}{x+1}=\dfrac{2(x^2-1)}{x+1}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x+1}=2(x-1)=2x-2$

Réponse : $\boxed{F=2x-2}$

7. $G=\dfrac{n^4-k^2}{n^2-k}=\dfrac{(n^2-k)(n^2+k)}{n^2-k}=n^2+k$

Réponse : $\boxed{G=n^2+k}$

Exercice 3 Calculer sans calculatrice :

1. $A=\dfrac{5^7-5^6}{5^6+5^6}=\dfrac{5^6(5-1)}{5^6(1+1)}=\dfrac{4}{2}=2$

Réponse : $\boxed{A=2}$

2. $B=\dfrac{9^6\times 2}{3^{15}+3^{16}}=\dfrac{(3^2)^6\times 2}{3^{15}+3^{16}}=\dfrac{3^{12}\times 2}{3^{15}+3^{16}}=\dfrac{3^{12}\times 2}{3^{12}(3^3+3^4)}=\dfrac{2}{27+81}=\dfrac{2}{108}=\dfrac{1}{54}$

Réponse : $\boxed{B=\dfrac{1}{54}}$

3. $C=\dfrac{3\times 2^{12}-2^{10}}{3\times 2^{13}}=\dfrac{2^{10}(3\times 2^2-1)}{2^{10}\times 2^3\times 3}=\dfrac{3\times 2^2-1}{2^3\times 3}=\dfrac{11}{24}$

Réponse : $\boxed{C=\dfrac{11}{24}}$

Exercice 4

Peut-on donner le résultat sous forme d'une puissance d'un nombre entier ?

1. $A = 8 \times 4^n$

⚠ la puissance est prioritaire, on ne peut pas multiplier le 8 et le 4.

Par contre : $A = 8 \times 4^n = 2^3 \times (2^2)^n = 2^3 \times 2^{2n} = 2^{3+2n}$

Réponse : $\boxed{A = 2^{2n+3}}$

2. $B = \dfrac{27^{10}}{3^{14}}$

⚠ les puissances sont prioritaires, on ne peut pas simplifier le 27 et le 3.

Par contre : $B = \dfrac{27^{10}}{3^{14}} = \dfrac{(3^3)^{10}}{3^{14}} = \dfrac{3^{30}}{3^{14}} = 3^{16}$

Ou : $B = \dfrac{27^{10}}{3^{14}} = \dfrac{27^{10}}{3^{10} \times 3^4} = \left(\dfrac{27}{3}\right)^{10} \times \dfrac{1}{3^4} = 9^{10} \times \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{(3^2)^{10}}{3^4} = \dfrac{3^{20}}{3^4} = 3^{16}$

Réponse : $\boxed{B = 3^{16}}$

3. $C = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Réponse : $\boxed{C = 2^{n+1}}$

Exercice 5

1. Si $U_n = \dfrac{2-n}{1-n^2}$, donner une expression la plus simple possible de U_{n+1}

$$U_{n+1} = \frac{2-(n+1)}{1-(n+1)^2} = \frac{2-n-1}{1-(n^2+2n+1)} = \frac{1-n}{-n^2-2n} = \frac{n-1}{n^2+2n}$$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = \dfrac{n-1}{n^2+2n}}$ ⚠ Pas de simplification possible !

2. Si $U_n = 2^{3n+1}$, donner une expression la plus simple possible de $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{3(n+1)+1}}{2^{3n+1}} = \frac{2^{3n+4}}{2^{3n+1}} = 2^{3n+4-(3n+1)} = 2^3 = 8$$

Réponse : $\boxed{\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 8}$

3. Si $U_n = 2^n$, donner une expression la plus simple possible de $\dfrac{U_{n+1} - U_n}{U_{2n}}$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{U_{2n}} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^{2n}} = \frac{2^n \times (2-1)}{2^{2n}} = \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-n}} = \frac{1}{2^n}$$

Réponse : $\boxed{\dfrac{U_{n+1} - U_n}{U_{2n}} = \dfrac{1}{2^n}}$

4. Si $U_n = 3 \times 2^n$, donner une expression la plus simple possible de $\dfrac{U_{n+1} - U_n}{6^n}$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{6^n} = \frac{3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n}{6^n} = \frac{3 \times 2^n \times (2-1)}{(3 \times 2)^n} = \frac{3 \times 2^n}{3^n \times 2^n} = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

Réponse : $\boxed{\dfrac{U_{n+1} - U_n}{6^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}}$

Exercice 6 Donner une expression de b en fonction de a dans les cas suivants :

1. $a = \dfrac{2b-3}{4}$

$a = \dfrac{2b-3}{4}$

$\iff 4a = 2b - 3$

$\iff 2b = 4a + 3$

$\iff b = \dfrac{4a+3}{2}$

Réponse : $\boxed{b = \dfrac{4a+3}{2}}$ ou Réponse : $\boxed{b = 2a + \dfrac{3}{2}}$

2. Pour $b \neq 2$ et $a \neq 0$, $a = \dfrac{3}{b-2}$

$a = \dfrac{3}{b-2}$

$\iff a(b-2) = 3$

$\iff ab - 2a = 3$

$\iff ab = 3 + 2a$

$\iff b = \dfrac{3+2a}{a}$ car $a \neq 0$

Réponse : $\boxed{b = \dfrac{3+2a}{a}}$ ou Réponse : $\boxed{b = \dfrac{3}{a} + 2}$

3. Pour $a \neq 1$ et $b \neq -3$, $a = \dfrac{b+1}{b+3}$

$a = \dfrac{b+1}{b+3}$

$\iff a(b+3) = b + 1$

$\iff ab + 3a = b + 1$

$\iff ab - b = 1 - 3a$

$\iff b(a-1) = 1 - 3a$

$\iff b = \dfrac{1-3a}{a-1}$ car $a - 1 \neq 0$

Réponse : $\boxed{b = \dfrac{1-3a}{a-1}}$