16/01/20 DS

Ex 1

1) a) $(z^2+5)(2z^2+z+1)=0$

$\Leftrightarrow z^2+5=0$ ou $2z^2+z+1=0$

* $z^2+5=0$
$\Leftrightarrow z^2=-5$
$\Leftrightarrow z^2=5i^2$
$\Leftrightarrow z=i\sqrt{5}$ ou $z=-i\sqrt{5}$

* $2z^2+z+1=0$
$\Delta=1-8=-7<0$
2 racines complexes conjuguées
$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$
$z_1=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}$
$z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\boxed{S=\left\{i\sqrt{5}\,;\,-i\sqrt{5}\,;\,-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\,-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}\right\}}$

2) $4z-3i=2iz+2$
$4z-2iz=2+3i$
$z(4-2i)=2+3i$
$z=\frac{2+3i}{4-2i}=\frac{(2+3i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{8+4i+12i-6}{4^2+2^2}$
$z=\frac{2+16i}{20}$
$\boxed{z=\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i}$

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z)=0$
$\Leftrightarrow x^2-x+y^2+4y+1=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y+2)^2-4+1=0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=3+\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{13}{4}$

L'ensemble de point Γ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-2\right)$ de rayon $\sqrt{\frac{13}{4}}$ ou $\frac{\sqrt{13}}{2}$

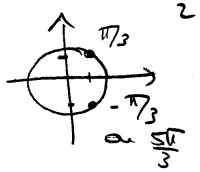
Ex 3

$A=\frac{(3e^{a-1})^2\times e^{-3a}}{e}=\frac{9e^{2a-2}\times e^{-3a}}{e^1}=9e^{2a-2-3a-1}=\boxed{9e^{-a-3}}$

$B=\frac{(2-e^{-a})^2}{e^{-a}}=\frac{4-4e^{-a}+e^{-2a}}{e^{-a}}=\frac{4}{e^{-a}}-\frac{4e^{-a}}{e^{-a}}+\frac{e^{-2a}}{e^{-a}}$
$=\boxed{4e^a-4+e^{-a}}$

Ex 2

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x>0$



Dans $]-\pi;\pi]$ $\boxed{x=-\frac{\pi}{3}}$

Dans $[0;2\pi[$ $\boxed{x=\frac{5\pi}{3}}$

Ex 4

$f(x)=xe^{-x^2}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

Donc F. I

$f(x)=\frac{1}{x}\times x^2e^{-x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ car on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times x^2e^{-x^2}=0\times0=\boxed{0}$

2) $f'(x)=1\times e^{-x^2}+x\times e^{-x^2}\times(-2x)$
$\boxed{f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)}$
$f'(1)=e^{-1}(1-2)=-e^{-1}$
$f'(-1)=e^{-1}(1-2)=-e^{-1}$
$\boxed{f'(1)=f'(-1)}$
donc les tangentes à C_f aux points d'abscisse 1 et -1 sont parallèles

Rq: $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=-xe^{-(-x)^2}=-xe^{-x^2}=-f(x)$
donc C_f est symétrique par rapport à l'origine.

3) On cherche le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}$
$f(x)-x=xe^{-x^2}-x=x(e^{-x^2}-1)$
$e^{-x^2}-1\geq0\Leftrightarrow e^{-x^2}\geq1$
$\Leftrightarrow e^{-x^2}\geq e^0$
$\Leftrightarrow -x^2\geq0$] toujours faux
donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{-x^2}-1\leq0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	ϕ	$+$	
$e^{-x^2}-1$		$-$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	ϕ	$-$	

Donc sur $]-\infty, 0]$ $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (ox)
et sur $[0, +\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (o)

Ex 5 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{-1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ FI

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) En $-\infty$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote et en $+\infty$ la droite d'equation $y = 1$ est asymptote.

2a) $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \dfrac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}}$

$= \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{-(e^x - 1)}{e^x + 1} = -f(x)$

$\mathcal{C}_f$ est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.