Primitives 1 - Correction

Ex 1 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

Montrer que la fonction g définie par $g(x)=x\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Réponse :

Il faut vérifier que pour tout x dans $]0\,;+\infty[$, on a $g'(x)=f(x)$

On a : $g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x+x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}=f(x)$

CQFD

Ex 2 Soit $f(x)=2x^2-4x$ pour x réel. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1)=5$

Réponse :

On a $F(x)=2\times\dfrac{x^3}{3}-4\times\dfrac{x^2}{2}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ donc $F(x)=\dfrac{2x^3}{3}-2x^2+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

$F(1)=5$ donc $\dfrac{2}{3}-2+k=5$ et donc $k=7-\dfrac{2}{3}=\dfrac{19}{3}$

Conclusion : $\boxed{F(x)=\dfrac{2x^3}{3}-2x^2+\dfrac{19}{3}}$

Ex 3 Soit un réel a et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+3x+2$.

Soit F une primitive de f. Déterminer a sachant que $F(2)=3$ et $F(1)=2$.

Réponse : F est une primitive de f donc $F(x)=a\times\dfrac{x^3}{3}+3\times\dfrac{x^2}{2}+2x+C$ avec C un réel.

$F(2)=3$ donc $a\times\dfrac{2^3}{3}+3\times\dfrac{2^2}{2}+4+C=3$ c'est-à-dire $\dfrac{8a}{3}+6+4+C=3$ et donc $\dfrac{8a}{3}+C=-7$

$F(1)=2$ donc $a\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{2}+2+C=2$ c'est-à-dire $\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{2}+2+C=2$ et donc $\dfrac{a}{3}+C=\dfrac{-3}{2}$

On résout donc le système : $\begin{cases}\dfrac{8a}{3}+C=-7 & L_1\\[2mm] \dfrac{a}{3}+C=\dfrac{-3}{2} & L_2\end{cases}$

D'après L_1-L_2 , on a : $\dfrac{8a}{3}-\dfrac{a}{3}=-7+\dfrac{3}{2}$

et donc $\dfrac{7a}{3}=\dfrac{-11}{2}$

puis $7a\times 2=-11\times 3$

soit $14a=-33$ donc

$\boxed{a=\dfrac{-33}{14}}$ et donc $\boxed{f(x)=\dfrac{-33}{14}x^2+3x+2}$