AP Exp et ln

Ex 1

1) $A = \ln(\sqrt{5}) - \ln(5e) + \ln\left(\frac{e^{-4}}{5}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln 5 - (\ln 5 + \ln e) + \ln(e^{-4}) - \ln 5$

$= \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 5 - 1 - 4 - \ln 5$

$= \frac{1}{2}\ln 5 - 2\ln 5 - 5$

$\boxed{A = -\frac{3}{2}\ln 5 - 5}$

2) $\ln(x-2) < e$ avec $x - 2 > 0$ donc $x > 2$

On résout dans $]2, +\infty[$

$\ln(x-2) < e$) exp ↗

$\iff x - 2 < e^e$

$\iff x < 2 + e^e$ donc $\boxed{S = [2, 2+e^e]}$

3) Résoudre $x e^{1-x} = x$ dans $\mathbb{R}$

$x e^{1-x} = x$

$\iff x e^{1-x} - x = 0$

$\iff x(e^{1-x} - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $e^{1-x} - 1 = 0$

$\iff x = 0$ ou $e^{1-x} = 1$

$\iff x = 0$ ou $1 - x = \ln 1$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$

$\boxed{S = \{0 ; 1\}}$

4) $(0,3)^n < 10^{-7}$

$\iff \ln(0,3^n) < \ln(10^{-7})$) ln ↗ sur $]0, +\infty[$

$\iff n \ln(0,3) < \ln(10^{-7})$

$\iff n > \frac{\ln(10^{-7})}{\ln(0,3)} \simeq 13,39$) : $\ln(0,3) < 0$ car $0,3 < 1$

Avec calculatrice $\boxed{n_0 = 14}$

(2)

5) $f(x) = e^{-\ln\left(\frac{3}{x}\right)}$ pour $x > 0$

Méthode 1 : $f(x) = \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{x}\right)}} = \frac{1}{\frac{3}{x}} = \boxed{\frac{x}{3}}$

Méthode 2 : $f(x) = e^{-\ln\left(\frac{3}{x}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x}{3}\right)} = \boxed{\frac{x}{3}}$

Ex 2 $f(x) = \ln(3 + e^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$

1) $\boxed{f'(x) = \frac{-e^{-x}}{3 + e^{-x}}} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc f décroissante sur $\mathbb{R}$

2) * $\lim_{x \to +\infty} 3 + e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{1}{e^x} = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0 = 3$

donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(3 + e^{-x}) = \lim_{X \to 3} \ln X = \boxed{\ln 3}$

(car ln continue sur $]0, +\infty[$

* $\lim_{x \to -\infty} 3 + e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} 3 + \frac{1}{e^x} = 3 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(3 + e^{-x}) = \lim_{X \to +\infty} \ln X = \boxed{+\infty}$

3) $f(x) = \ln(3 + e^{-x}) = \ln\left(3 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{3e^x + 1}{e^x}\right)$

$= \ln(3e^x + 1) - \ln(e^x) = \boxed{\ln(3e^x + 1) - x}$

Pour déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$, on cherche le signe de $f(x) - (-x)$ donc de $f(x) + x$ pour $x \in \mathbb{R}$

On a $f(x) + x = \ln(3e^x + 1) - x + x = \ln(3e^x + 1)$

or $3e^x + 1 > 1$ car $e^x > 0$

donc $\ln(3e^x + 1) > 0$

donc $f(x) + x > 0$

càd $\boxed{f(x) > -x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y = -x$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $h(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ pour $x \in]-2;2[$

1) Si $x \in]-2;2[$ alors $-2 < x < 2$

$-2 < x$ donc $x+2 > 0$

$x < 2$ donc $2-x > 0$ } $\frac{2-x}{2+x} > 0$

2) Résoudre $h(x) = 1$

$$h(x) = 1 \iff \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = 1$$

$$\iff \frac{2-x}{2+x} = e$$

$$\iff e(2+x) = 2-x$$

$$\iff 2e + ex = 2-x$$

$$\iff ex + x = 2-2e$$

$$\iff x(e+1) = 2-2e$$

$$\iff \boxed{x = \frac{2-2e}{e+1}}$$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \in]-2,2[}} \frac{2-x}{2+x} = \frac{0}{4} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = \boxed{-\infty}$.

* $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2-x}{2+x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

car $x > -2$ donc $x+2 > 0$

donc $\lim h(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = \boxed{+\infty}$

4) $h(-x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

$= -\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -h(x)$

$\boxed{h(-x) = -h(x)}$ pour tout $x \in]-2,2[$

C_h est donc symétrique par rapport à l'origine du repère