Equations et Inéquations avec ln et exp

$\boxed{Ex 1}$

1) $\ln(x-1) = 3$ avec $x-1>0$ donc $x>1$

On résout dans $]1,+\infty[$

$\ln(x-1) = 3$

$\Leftrightarrow x-1 = e^3$

$\Leftrightarrow x = 1+e^3$

$1+e^3 > 1$

$\boxed{S = \{1+e^3\}}$

2) $3e^{x-2} = 4$ dans $\mathbb{R}$

$3e^{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x-2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)+2$

$\boxed{S = \left\{\ln\left(\frac{4}{3}\right)+2\right\}}$

3) $2x\ln x = 4x$ avec $x>0$ donc on résout dans $]0,+\infty[$

$2x\ln x = 4x$

$\Leftrightarrow 2x\ln x - 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(\ln x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e^2$

⚠ $\boxed{S = \{e^2\}}$

4) $\ln x - (\ln x)^2 = 0$ dans $]0,+\infty[$

$\ln x - (\ln x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x(1-\ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $1-\ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$

$\boxed{S = \{1;e\}}$

5) $e^{2x}+e^x = 6$ dans $\mathbb{R}$

$e^{2x}+e^x = 6 \Leftrightarrow e^{2x}+e^x-6 = 0$

On pose $X = e^x$

$X^2+X-6 = 0$

$\Delta = 1+24 = 25$

$X_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$ $\quad X_2 = \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3}$

On cherche x :

$X = 2$ $\quad X = -3$

$\Leftrightarrow e^x = 2$ $\quad \Leftrightarrow e^x = -3$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ $\quad$ Pas de solution

$\boxed{S = \{\ln 2\}}$

6) $\frac{(\ln x)^2}{\ln x+2} = 1$

⚠ $\ln x$ existe pour $x>0$

la fraction existe si $\ln x+2 \neq 0$

$\ln x+2 = 0$

$\ln x = -2$

$x = e^{-2}$

On résout dans $]0,+\infty[-\{e^{-2}\}$

$\frac{(\ln x)^2}{\ln x+2} = 1$

$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = \ln x+2$

$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

On pose $X = \ln x$

$X^2 - X - 2 = 0$

$\Delta = 1+8 = 9$

$X_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ $\quad X_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

On cherche x :

$X = 2$ $\quad X = -1$

$\Leftrightarrow \ln x = 2$ $\quad \Leftrightarrow \ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = e^2$ $\quad \Leftrightarrow x = e^{-1}$

$\boxed{S = \left\{e^2 ; \frac{1}{e}\right\}}$

Ex 2

1) $e^{x-2} - 3 > 0$ avec $x \in \mathbb{R}$

$e^{x-2} - 3 > 0$

$\iff e^{x-2} > 3$) ln ↗ sur $]0,+\infty[$

$\iff x - 2 > \ln 3$

$\iff x > \ln 3 + 2$

$\boxed{S =]\ln 3 + 2 ; +\infty[}$

2) $\ln(x-1) + 2 > 0$ avec $x - 1 > 0$ donc $x > 1$

On résout dans $]1;+\infty[$

$\ln(x-1) + 2 > 0$

$\iff \ln(x-1) > -2$) exp ↗ sur $\mathbb{R}$

$\iff x - 1 > e^{-2}$

$\iff x > e^{-2} + 1$

$1 + e^{-2} > 1$

donc $\boxed{S =]1+e^{-2} ; +\infty[}$

3) $3 - 2\ln(2x) > e$ avec $2x > 0$

On résout dans $]0,+\infty[$

$3 - 2\ln(2x) > e$

$\iff -2\ln(2x) > e - 3$

$\iff \ln(2x) < \dfrac{e-3}{-2}$

$\iff \ln(2x) < \dfrac{3-e}{2}$) exp ↗ sur $\mathbb{R}$

$\iff 2x < e^{\frac{3-e}{2}}$

$\iff x < \frac{1}{2} e^{\frac{3-e}{2}}$

⚠ $\boxed{S =]0 ; \frac{1}{2} e^{\frac{3-e}{2}}[}$

4) $\ln(0,2)\, x - \sqrt{3} \geq 0$

On résout dans $\mathbb{R}$

$\ln(0,2)\, x - \sqrt{3} \geq 0$

$\iff \ln(0,2)\, x \geq \sqrt{3}$

$\iff x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{\ln(0,2)}$ car $\ln(0,2) < 0$ puisque $0,2 < 1$

$\boxed{S =]-\infty ; \dfrac{\sqrt{3}}{\ln(0,2)}]}$

5) $(x-1)\ln(3-x) \leq 0$ avec $3 - x > 0$ donc $x < 3$

On résout dans $]-\infty;3[$

$(x-1)\ln(3-x)$ est un produit.

On va utiliser un tableau de signes.

$x - 1 > 0$ et $x - 1 = 0$

$\iff x > 1$ $\iff x = 1$

$\ln(3-x) > 0$) exp ↗

$\iff 3 - x > e^0$

$\iff -x > 1 - 3$

$\iff -x > -2$

$\iff x < 2$

et $\ln(3-x) = 0$

$\iff x = 2$

x	$-\infty$		1		2		3
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	‖
$\ln(3-x)$		$+$		$+$	0	$-$	‖
$(x-1)\ln(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖

$\boxed{S =]-\infty, 1] \cup [2;3[}$

6) $\dfrac{\ln x}{x^3} + 4\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$ avec $x > 0$ pour $\ln x$ et $x \neq 0$ pour la fraction

On résout dans $]0,+\infty[$

Méthode : Factorisation.

$\dfrac{\ln x}{x^3} + 4\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$

$\iff \dfrac{\ln x}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + 4\right) < 0$

$x > 0$ donc $\dfrac{1}{x} + 4 > 0$ (car $\dfrac{1}{x} \neq -4$)

$x^2 > 0$

donc $\dfrac{\ln x}{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + 4\right) < 0$

$\iff \ln x < 0$

$\iff x < 1$

⚠ $\boxed{S =]0, 1[}$

(5)

7) $2(\ln x)^2 + \ln x \leq 1$ avec $x > 0$

$\iff 2(\ln x)^2 + \ln x - 1 \leq 0$ On résout dans $]0, +\infty[$

On pose $\boxed{X = \ln x}$

$2X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ $X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$

X	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$2X^2+X-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2X^2 + X - 1 \leq 0 \iff -1 \leq X \leq \frac{1}{2}$

donc $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 \leq 0 \iff -1 \leq \ln x \leq \frac{1}{2}$) exp

$\iff e^{-1} \leq x \leq e^{1/2}$

$\boxed{S = [e^{-1} ; e^{1/2}]}$

ou $\boxed{S = \left[\frac{1}{e} ; \sqrt{e}\right]}$