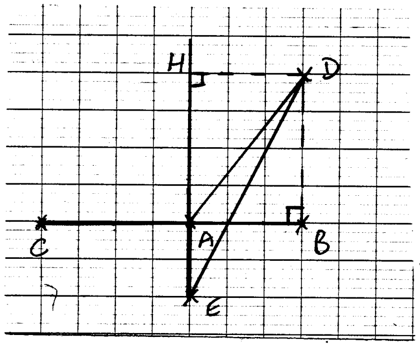
Exercices Produit scalaire

Ex1



1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\pi)$

$= 3 \times 7 \times (-1) = \boxed{-21}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

on projette sur (AB) — projeté orthogonal de $\overrightarrow{AD}$ sur (AB)

$= AB \times AB \times \cos(0)$

$= 3 \times 3 \times 1 = \boxed{9}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AE} = AH \times AE \times \cos(\pi)$

on projette $\overrightarrow{AD}$ orthogonalement sur (AE)

$= 4 \times 2 \times (-1)$

$= \boxed{-8}$

2) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

signifie que $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux
ou que les droites (MB) et (AD) sont orthogonales.
donc l'ensemble de points M est la droite
perpendiculaire à (AD) passant par B.

Ex2

$A(5,-2)$ $B(-3,-4)$ $E(-5,18)$

1) $F(a;3)$

a) $\overrightarrow{AB}(-3-5\,;\,-4+2)$ $\overrightarrow{EF}(a+5\,;\,3-18)$

$\overrightarrow{AB}(-8\,;\,-2)$ $\overrightarrow{EF}(a+5\,;\,-15)$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = -8(a+5) - 2 \times (-15)$

$= -8a - 40 + 30$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = -8a - 10}$

b) $(AB) \perp (EF) \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$

$\iff -8a - 10 = 0$

$\iff -8a = 10$

$\iff \boxed{a = \frac{-5}{4}}$

2) $M(x,y)$ $A(5,-2)$ $B(-3,-4)$

a) $\overrightarrow{MA}(5-x, -2-y)$ $\overrightarrow{MB}(-3-x, -4-y)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (5-x)(-3-x) + (-2-y)(-4-y)$

$= -15 - 5x + 3x + x^2 + 8 + 2y + 4y + y^2$

$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = x^2 - 2x + y^2 + 6y - 7}$

b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \iff M = A$ ou $M = B$ ou $(AM) \perp (MB)$

$\iff M = A$ ou $M = B$ ou
le triangle AMB est rectangle en M

$\iff M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$

ou Méthode 2.

Vérifions que $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 7 = 0$ est un cercle

$x^2 - 2x + y^2 + 6y - 7 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 - 7 = 0$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$

On reconnaît l'équation d'un cercle
de centre $\Omega(1,-3)$
de rayon $\sqrt{17}$