$\boxed{Ex\ 3}$ $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ sur $]0,+\infty[$

1) $\varphi(e^x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = f(x)$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(e^x) = \lim\limits_{X\to 1} \varphi(X) = \boxed{-\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(e^x) = \lim\limits_{X\to +\infty} \varphi(X) = \boxed{0}$

c) $f'(x) = \varphi'(e^x) \times e^x$

Pour tout $x>0$, $e^x > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi'(e^x)$

* Sur $]1, \ln(\sqrt{\alpha})[$

$1 < x < \ln(\sqrt{\alpha})$) exp ↑

$e < e^x < \sqrt{\alpha}$

D'après $\boxed{Ex\ 2}$, 3 a)

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	

donc $\varphi'(e^x) > 0$

donc $f'(x) > 0$ et f croissante sur $]1, \ln(\sqrt{\alpha})[$

* Sur $]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[$

$x > \ln(\sqrt{\alpha})$) exp ↑

donc $e^x > \sqrt{\alpha}$

donc $\varphi'(e^x) < 0$ donc $f'(x) < 0$

donc f décroissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[$

3) $\forall x \in]0,+\infty[$ $f(x) \leq f(\ln(\sqrt{\alpha}))$

avec $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \dfrac{\ln(e^{2\ln(\sqrt{\alpha})}-1)}{e^{\ln(\sqrt{\alpha})}} = \dfrac{\ln(e^{\ln(\alpha)}-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$$\boxed{f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}}$$

<u>Rappel</u> : α est la valeur qui annule g

donc $g(\alpha) = 0$

càd $2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$

donc $2\alpha = (\alpha-1)\ln(\alpha-1)$

et $\ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

donc $f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \dfrac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$= \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

On a donc prouvé que pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$\boxed{f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}}$$