Exercice 1

1. $(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\dfrac{(-3+\mathrm{i}\sqrt{3})(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{1+3}\right)$

$$= \arg\left(\frac{-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) = \arg(-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}.$$

donc $\boxed{\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}}$

2. Le triangle ABC est rectangle en B, donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse c'est-à-dire le milieu de [AC].

On a donc : $z_\Omega = \dfrac{z_A + z_c}{2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \boxed{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Exercice 2

1. $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z}{\bar{z}-1} - 1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z-\bar{z}+1}{\bar{z}-1}}{z-1} = \dfrac{2-z-\bar{z}}{\bar{z}-1} \times \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{2-(z+\bar{z})}{(\bar{z}-1)(z-1)}$

$$= \frac{2-(z+\bar{z})}{z\bar{z}-\bar{z}-z+1} = \frac{2-(z+\bar{z})}{z\bar{z}-(\bar{z}+z)+1}$$

Si on pose $z = a + ib$ avec a et b réels, on a $\bar{z} = a - ib$.

et $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{2-2a}{a^2+b^2-2a+1}$.

a et b étant réels, on a : $\dfrac{2-2a}{a^2+b^2-2a+1} \in \mathbb{R}$ donc $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

2. D'après la question précédente, on a : $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z-1}\right) = 0 \text{ ou } \pi$

c'est-à-dire : $\arg\left(\dfrac{z'-z_A}{z-z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi$

donc $(\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AM'}) = 0 \text{ ou } \pi$ et donc A, M et M' sont alignés.

Exercice 3

1. $(\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$

2. O, M et M' sont alignés $\iff (\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{OM'}) = 0 \text{ ou } \pi$

$\iff \arg(z) = 0 \text{ ou } \pi$

$\iff (\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}) = 0 \text{ ou } \pi$

$\iff$ M appartient à l'axe des abscisses avec M $\neq$ O et M $\neq \Omega$.

L'ensemble Γ cherché est donc l'axe des abscisses privé des points O et Ω.

Exercice 4

1.

2. Pour montrer que (SΩ) est la médiatrice de [AB], il suffit de montrer que les points S et Ω appartiennent à la médiatrice de [AB], pour cela, il suffit donc de montrer que : SA = SB et ΩA = ΩB.

- On a : $\text{SA} = |a-s| = |3-\mathrm{i}| = \sqrt{10}$ et $\text{SB} = |a-b| = |1-3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$

donc SA = SB et donc S appartient à la médiatrice de [AB].

- De même : $\Omega A = |a-\omega| = |-2+4\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}| = |2\mathrm{i}| = 2$

et $\Omega B = |b-\omega| = |-4+2\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}| = |-2| = 2$

donc ΩA = ΩB et donc Ω appartient à la médiatrice de [AB].

Conclusion : (SΩ) est la médiatrice de [AB].

3. $\dfrac{\omega - p}{s-b} = \dfrac{-2+2\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{-5+5\mathrm{i}+4-2\mathrm{i}} = \dfrac{-3-\mathrm{i}}{-1+3\mathrm{i}} = \dfrac{(-3-\mathrm{i})(-1-3\mathrm{i})}{1+9}$

$= \dfrac{3+9\mathrm{i}+\mathrm{i}-3}{10} = \dfrac{10\mathrm{i}}{10} = \mathrm{i}.$

donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{BS}},\ \overrightarrow{\mathrm{P\Omega}}\right) = \arg\left(\dfrac{\omega-p}{s-b}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : les droites (BS) et (PΩ) sont perpendiculaires.

4. **a.** Si Q est le symétrique du point S par rapport à B, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SB}}$ donc ces deux vecteurs ont même affixe c'est-à-dire $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{Q}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{S}}$

c'est-à-dire $q - b = b - s$

et donc $q = 2b - s = -8 + 4\mathrm{i} + 5 - 5\mathrm{i} = -3 - \mathrm{i}.$

Autre méthode possible :

Si Q est le symétrique du point S par rapport à B, alors B est le milieu de [QS] donc $z_{\mathrm{B}} = \dfrac{z_{\mathrm{Q}} + z_{\mathrm{S}}}{2}$

$b = \dfrac{q+s}{2}$

$q + s = 2b$

$q = 2b - s = -3 - \mathrm{i}$

b. $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) = \arg\left(\dfrac{q-p}{b-a}\right) = \arg\left(\dfrac{-3-\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{-4+2\mathrm{i}+2-4\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\dfrac{-4-4\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{2(-2-2\mathrm{i})}{-2-2\mathrm{i}}\right) = \arg(2) = 0.$

On en déduit donc que les droites (AB) et (PQ) sont parallèles.

5. - On sait que la droite (PΩ) est perpendiculaire à la droite (BS) et donc perpendiculaire à la droite (SQ) car S, B et Q sont alignés, donc (PΩ) est une hauteur du triangle PQS.

- On sait également que (SΩ) est perpendiculaire à (AB) puisque (SΩ) est la médiatrice de [AB]. Les droites (AB) et (PQ) étant parallèles, on en déduit alors que (SΩ) est perpendiculaire à (PQ) donc (SΩ) est une autre hauteur du triangle PQS.

- Le point Ω, étant l'intersection de deux hauteurs du triangle PQS, est donc l'orthocentre du triangle PQS.

(remarque : Ω est l'intersection des trois hauteurs du triangle, et donc (QΩ) est la troisième hauteur du triangle PQS).

Nathalie Arnaud - Lycée Théophile Gautier