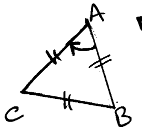
Produit scalaire dans le plan. (1ère)

1) Définition:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nul est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et est un nombre réel défini par

♡ $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})}$$

Ex: ABC triangle équilatéral de côté 5.



↺⊕

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$
$$= 5 \times 5 \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 5 \times 5 \times \frac{1}{2}$$
$$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 12{,}5}$$

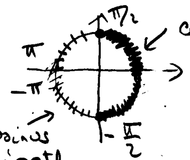
Rappel: $\|\vec{u}\|$ se lit norme de $\vec{u}$ et $\|\vec{AB}\| = AB$.

Propriété: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$ ♡ $\boxed{\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$

Ex: $\vec{AB}\cdot\vec{EB} = \vec{AB}\cdot(-\vec{BE}) = -\vec{AB}\cdot\vec{BE}$.

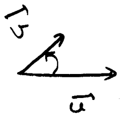
2) Signe du produit scalaire.

Une norme étant positive $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est du signe de $\cos(\vec{u},\vec{v})$

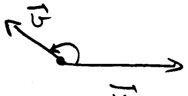


* Si $(\vec{u},\vec{v}) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
  $\cos(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$.
* Si $(\vec{u},\vec{v}) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
  $\cos(\vec{u},\vec{v}) \leq 0$.

♡ Ex:



$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ (Angle aigu)



$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ (Angle obtus)

3) Produit scalaire nul (pour $\vec{u}$, $\vec{v}$, non nuls)

♡ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$
$\iff (\vec{u},\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$

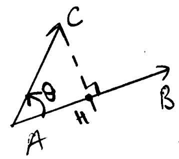
Ex:

Si $(\vec{u},\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$ on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

3) Calcul du produit scalaire à l'aide de projetés orthogonaux

↺⊕

Ex:



① $\vec{AB}\cdot\vec{AC} > 0$

② $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB},\vec{AC})$

③ On démontre que

$$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}}$$

♡ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

Preuve: $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB \times AH \times \cos(\vec{AB},\vec{AH}) = AB \times AH \times 1$
$= AB \times AH$

Dans le triangle AHC rectangle en H on a $\cos\theta = \frac{AH}{AC}$

donc $AH = AC \times \cos\theta$

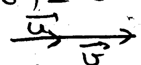
et donc $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB \times AC \times \cos\theta = \vec{AB}\cdot\vec{AC}$

Rmq:

Dans ce cas on a encore $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$

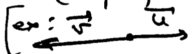
4) Produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $(\vec{u},\vec{v}) = 0$ [ex:



]

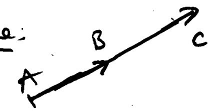
ou $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$ [ex:



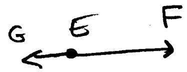
]

donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$
ou $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$

Exemple:



$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times 1$
$= AB \times AC$



$\vec{EF}\cdot\vec{EG} = EF \times EG \times (-1)$
$= -EF \times EG$

Donc le produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires est facile à calculer.

La méthode qui utilise les projetés orthogonaux ramène le calcul d'un produit scalaire à un produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires.