5) <u>Convention</u>: Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. | $\vec{u}\cdot\vec{0} = 0$; $\vec{0}\cdot\vec{v} = 0$.

<u>Propriétés</u>:

① $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$

② $\forall k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$

et donc d'après ① $\boxed{(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$

<u>Preuve</u>:

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

$\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{v},\vec{u})$

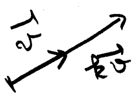
$= \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(-(\vec{u},\vec{v}))$

$= \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

| or $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

② <u>Si $k\geq 0$</u>. $k\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}$ de même sens.
et $\|k\vec{v}\| = k\times\|\vec{v}\|$

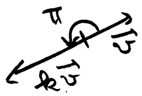


donc $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times\|k\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\|\times k\times\|\vec{v}\|\times\underbrace{\cos(0)}_{1}$

$= k\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

<u>Si $k<0$</u>. $k\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}$ de sens contraire
et $\|k\vec{v}\| = \underbrace{-k}_{+}\|\vec{v}\| > 0$



donc $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = \|\vec{u}\|\times\|k\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\|\times(-k)\|\vec{v}\|\times\cos(\pi)$

$= \|\vec{u}\|\times(-k)\|\vec{v}\|\times(-1)$

$= k\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

<u>Si $k=0$</u> alors $k\vec{v} = \vec{0}$
donc $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$
et $k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$

<u>Conclusion</u> pour tout k dans $\mathbb{R}$ on a bien
$\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

<u>Propriété</u>:

③ $\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}}$

(Admis)

6) <u>Calcul d'un produit scalaire dans un repère orthonormé du plan.</u> $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit $\vec{u}$ de coordonnées (x,y) alors $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$
$\vec{v}$ ——— (x',y') $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$

alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

$= \vec{u}\cdot(x'\vec{i}) + \vec{u}\cdot(y'\vec{j})$ [Prop ③]

$= x'\times(\vec{u}\cdot\vec{i}) + y'\times(\vec{u}\cdot\vec{j})$ [Prop ②]

$= x'\times(\vec{i}\cdot\vec{u}) + y'\times(\vec{j}\cdot\vec{u})$ [Prop ①]

$= x'\times(\vec{i}\cdot(x\vec{i}+y\vec{j})) + y'\times(\vec{j}\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}))$

[Prop ③] et Prop ②

$= x'(x\times(\vec{i}\cdot\vec{i}) + y\times(\vec{i}\cdot\vec{j}))$
$+ y'(x\times(\vec{j}\cdot\vec{i}) + y\times(\vec{j}\cdot\vec{j}))$

le repère est orthonormé, cela signifie que
$\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}\perp\vec{j}$
donc $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$
ou $\vec{j}\cdot\vec{i} = 0$.

donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = x'(x\times(\vec{i}\cdot\vec{i})) + y'(y\times(\vec{j}\cdot\vec{j}))$

$= xx'(\vec{i}\cdot\vec{i}) + yy'(\vec{j}\cdot\vec{j})$

or $\vec{i}\cdot\vec{i} = \|\vec{i}\|\times\|\vec{i}\|\times\cos(0) = 1\times1\times1 = 1$

de même $\vec{j}\cdot\vec{j} = 1$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

<u>Propriété</u>:

Dans un repère orthonormé du plan.
si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$
alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'}$

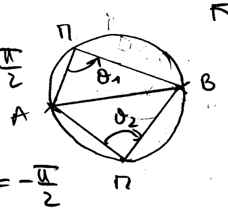
Produit scalaire (5)

5) Application du produit scalaire

prop: Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$

prop: M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$



$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

Preuve: Soit $M \neq A$ et $M \neq B$.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\vec{MA},\vec{MB}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{MA},\vec{MB}) = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{MA}, \vec{MB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \cos(\vec{MA},\vec{MB}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$.

Si $M = A$, $A \in \mathcal{C}$ et $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = \vec{0}\cdot\vec{MB} = 0$

Si $M = B$, $B \in \mathcal{C}$ et $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = \vec{MA}\cdot\vec{0} = 0$.

Exemple: $A(-2,6)$ $B(1,-3)$ $C(4,0)$

1) Calculer $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$.

$\vec{CA}(-2-4\,;6-0)$ $\vec{CB}(1-4\,;-3-0)$

$\vec{CA}(-6\,;6)$ $\vec{CB}(-3\,;-3)$

donc $\vec{CA}\cdot\vec{CB} = -6\times(-3)+6\times(-3) = 18-18=0$

$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0$

2) Que peut-on en déduire ?

$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0$ donc $(CA)\perp(CB)$

ou, le triangle ABC est rectangle en C.