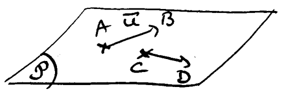
TD 18 Vecteurs dans l'espace (4)

V Produit scalaire de 2 vecteurs dans l'espace :

1) **Définition :**
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace
Il existe 4 points A, B, C, D coplanaires
(c'est à dire appartenant à un même plan $\mathcal{P}$)
tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$

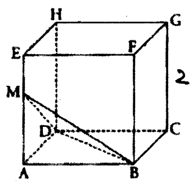


Par définition :

$$\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{\text{dans l'espace}} = \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}_{\text{dans le plan } \mathcal{P}}$$

Ce résultat est indépendant du plan $\mathcal{P}$ et des points A, B, C, D choisis

2) **Exemple :** On a un cube d'arête 2 et $AM = k$ ($k \in [0, 2]$)



Calculer :
1) $\vec{AB}\cdot\vec{FG}$
2) $\vec{AM}\cdot\vec{DH}$
3) $\vec{BM}\cdot\vec{BA}$
4) $\vec{MB}\cdot\vec{AE}$
5) $\vec{BA}\cdot\vec{EF}$
6) $\vec{AB}\cdot\vec{AF}$

Réponse :

1) $\underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{FG}}_{\text{non coplanaires}} = \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}_{\text{coplanaires}} = \boxed{0}$ car $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ (ou $(AB) \perp (BC)$)
(possible car $\vec{FG} = \vec{BC}$)

2) $\underbrace{\vec{AM}\cdot\vec{DH}}_{\text{coplanaires}} = AM \times DH \times 1 = k \times 2 \times 1 = \boxed{2k}$
(colinéaires de même sens)

3) $\underbrace{\vec{BM}\cdot\vec{BA}}_{\text{coplanaires}} = \vec{BA}\cdot\vec{BA} = BA \times BA \times 1 = 2 \times 2 = \boxed{4}$
[car $\vec{BA}$ est le projeté orthogonal de $\vec{BM}$ sur (BA)]

4) $\underbrace{\vec{MB}\cdot\vec{EF}}_{\text{coplanaires}} = \vec{EF}\cdot\vec{EF} = EF \times EF \times 1 = 2 \times 2 = \boxed{4}$
[car le projeté orthog. de $\vec{MB}$ sur (EF) est $\vec{EF}$]

5) $\vec{BA}\cdot\vec{EF} = BA \times EF \times (-1) = 2 \times 2 \times (-1) = \boxed{-4}$
coplanaires (colinéaires de sens contraire)

6) $\vec{AB}\cdot\vec{AF} = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = AB \times AB \times 1 = 2 \times 2 \times 1 = \boxed{4}$

TD 18 Vecteurs dans l'espace (5)

3) **Calcul du produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé de l'espace.**

propriété (admise) : Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

4) **Application du produit scalaire :**

Définition : Deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si leur direction sont orthogonales.

Propriété : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Exemple : $A(1, 2, -3)$ $B(-2, 1, 4)$ $C(2, -1, -3)$
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
On a : $\vec{AB}(-3 ; -1, 7)$ $\vec{AC}(1, -3, 0)$
donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -3 + 3 + 0 = 0$
donc $(AB) \perp (AC)$
et donc le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice :
Dans un repère orthonormé de l'espace
Soient les points $A(2, 4, -1)$ $B(2, -5, 4)$ $C(5, 2, -1)$
1) Démontrer que A, B, C définissent un plan
2) Soient $E(1, -1, -5)$ et $F\left(3, 2, \frac{2}{5}\right)$
Démontrer que (EF) est perpendiculaire au plan (ABC)