I. Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur (sens, direction, norme) vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace.

Les notions suivantes aussi :

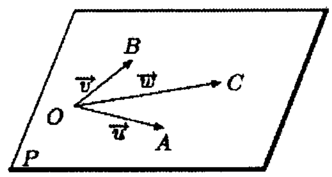
1. Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un point A et un seul tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.
2. Égalité de deux vecteurs à l'aide de la définition (sens, direction, norme)

   ou caractérisation à l'aide d'un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme.
3. Les règles de calculs (relation de Chasles, règle du parallélogramme, multiplication d'un vecteur par un réel)
4. La colinéarité de deux vecteurs et son application au parallélisme ou bien à l'alignement de trois points.

II. Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque, ayant choisi un point O quelconque, ce point O et les points A, B, C définis par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ sont coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan).

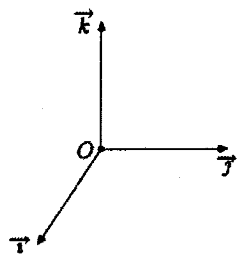


Remarque : On définit de la même façon la coplanarité de n vecteurs ($n \geqslant 3$).

III. Repérage cartésien dans l'espace

1. Repère de l'espace

Choisir un repère cartésien de l'espace, c'est se donner un point O appelé origine du repère, et un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs **non coplanaires** (ce qui signifie, si on note $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$, que les points O, I, J, K ne sont pas coplanaires).
On note $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ce repère.



2. Coordonnées

a. Coordonnées d'un point

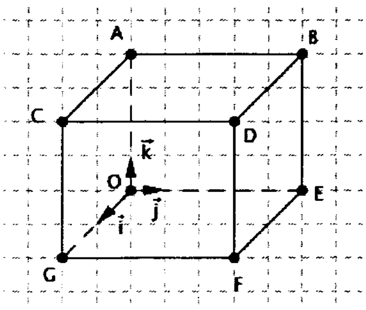
Théorème 1

$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

x est l'abscisse, y l'ordonnée, z la côte du point M dans ce repère.

Exemple :



On a $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{OE} = 5\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{k}$.

Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ puis en déduire leurs coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ donc $\overrightarrow{OB}(0,5,4)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k}$ donc $\overrightarrow{OC}(2,0,4)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}$

$= 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ donc $\overrightarrow{OD}(2,5,4)$

On a aussi $B(0,5,4)$ $C(2,0,4)$ $D(2,5,4)$

TD 18 (2)

b. Coordonnées d'un vecteur

Définition

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. $\vec{u}$ est un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Par définition, les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans ce repère.

2. Calculs sur les coordonnées.

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée.

1) Si $\vec{u}(x, y, z)$ $\vec{v}(x', y', z')$ alors $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\,(x+x', y+y', z+z')}$
$k \in \mathbb{R}$, $\boxed{k\vec{u}\,(kx, ky, kz)}$

2) le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\boxed{I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)}$

3) $\boxed{\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)}$

IV. Repère orthonormal. Distance dans l'espace

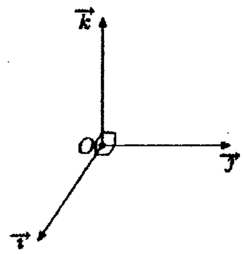
Définition Deux droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales si il existe une droite (d'_1) parallèle à (d_1) telle que (d'_1) et (d_2) sont sécantes et perpendiculair

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si leurs directions sont orthogonales.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Définition

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.



Théorème 2

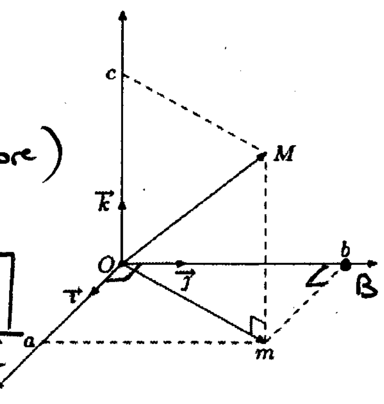
Dans un repère orthonormal de l'espace

1. Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
2. Si A et B ont pour coordonnées $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B - A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Rmq : $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$
$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
$= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Preuve :

1. Soit M le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors $\|\vec{u}\| = OM$.
   Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal donc le triangle OMm est rectangle en m, et donc $OM^2 = Om^2 + Mm^2$ (Pythagore)
   Le triangle OmB est rectangle en B donc $Om^2 = OB^2 + Bm^2$
   On a donc $OM^2 = OB^2 + Bm^2 + Mm^2$
   $= b^2 + a^2 + c^2 = \boxed{a^2+b^2+c^2}$
2. On applique ce qui précède au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



donc $OM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
et donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$