Ex 1 : $A(3,2,1)$ $B(-1,2,3)$ $C(0,-1,1)$

Déterminer une éq° cart. du plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à (BC)

$\overrightarrow{BC}(1,-3,-2)$ est normal à $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ a pour équation $x-3y-2z+d=0$

$A \in \mathcal{P}$ donc les coord. de A vérifient l'éq° de $\mathcal{P}$.

$3-6-2+d=0$ donc $d=5$ et $\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{x-3y-2z+5=0}$

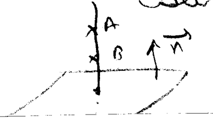
Ex 2 Soit $\mathcal{P}$ d'équation $2x-z-4=0$

$A(-2,1,3)$ $B(2,1,1)$

Montrer que (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

$\vec{n}(2,0,-1)$ est normal à $\mathcal{P}$.

(AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires



$\overrightarrow{AB}(4,0,-2)$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{n}$ donc $(AB) \perp \mathcal{P}$

Ex 3 $A(1,2,-3)$ $B(-1;0;4)$ $C(-2;2;5)$

1) Démontrer que A, B, C définissent un plan.

Il faut montrer que A, B, C ne sont pas alignés

càd que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}(-2;-2;7)$ $\overrightarrow{AC}(-3;0;8)$

$\frac{-2}{-3} \neq \frac{7}{8}$ donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ non colinéaires

2) Démontrer que $\vec{w}(8; \frac{5}{2}; 3)$ est normal au plan (ABC)

Pour cela on va montrer que $\vec{w} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} \perp \overrightarrow{AC}$

car (AB) et (AC) sont deux droites sécantes du plan (ABC)

$\vec{w}.\overrightarrow{AB} = -16-5+21=0$ donc $\vec{w} \perp \overrightarrow{AB}$ CQFD

$\vec{w}.\overrightarrow{AC} = -24+0+24=0$ donc $\vec{w} \perp \overrightarrow{AC}$

3) En déduire une équation du plan (ABC)

$\vec{w}$ est normal à (ABC) donc (ABC) a une équation du type

$8x+\frac{5}{2}y+3z+d=0$

$A \in (ABC)$ donc $8+5-9+d=0$ donc $d=-4$

$\mathcal{P}$ $\boxed{8x+\frac{5}{2}y+3z-4=0}$

Vérif° avec B.

Ex 4 Soit $\mathcal{P}$: $-4x+y-z+1=0$.

Déterminer une éq° de $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $A(0,2;-4)$

$\vec{n}(-4,1,-1)$ normal à $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}' /\!/ \mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}'$

donc $\mathcal{P}'$ a pour équation $-4x+y-z+d=0$

$A \in \mathcal{P}'$ donc $0+2+4+d=0$

$d=-6$

$\mathcal{P}'$: $\boxed{-4x+y-z-6=0}$

Ex 5 Soit $\mathcal{P}$ d'équation $-x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+4=0$

$\mathcal{P}'$ ———— $-3x+y-2z+5=0$.

1) Démontrer que $\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'$.

$\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$ $\vec{n}(-1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

$\vec{n}'$ normal à $\mathcal{P}'$. $\vec{n}'(-3,1,-2)$

On a : $\vec{n}' = 3\vec{n}$

donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles

2) Rmq : $\mathcal{P}$ a aussi pour équation $-3x+y-2z+12=0$

donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas confondus (car équations différentes)

et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strict parallèles.

Méth 2 : $A(4,0,0) \in \mathcal{P}$ et $A \notin \mathcal{P}'$. donc $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$

TD Plans (2)

Ex 6 $P_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0$

$P_2 : -x + 2y + 2z - 2 = 0$

1) Démontrer que P_1 et P_2 sont sécants

$\vec{n_1}(2,1,-3)$ $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc P_1 et P_2 ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants.

$\vec{n_2}(-1,2,2)$

2) P_1 et P_2 sont-ils perpendiculaires ?

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = -2 + 2 - 6 = -6 \neq 0$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogonaux donc P_1 et P_2 ne sont pas perpendiculaires

3) Déterminer la droite d'intersection de P_1 et P_2

On résout $\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ -x + 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ 2 équations 3 inconnues.

on se ramène à un système de 2 équations à 2 inconnues. $\left\{\right.$ 2 inconnues principales x et y ; 1 inconnue secondaire z que l'on met dans le second membre.

$$\begin{cases} 2x + y = 3z + 1 \\ -x + 2y = -2z + 2 \end{cases}$$

On cherche x et y en fonction de z.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \times 2 \end{array}\begin{cases} 2x + y = 3z + 1 \\ -2x + 4y = -4z + 4 \end{cases}$$

Par addition $5y = -z + 5$ donc $\boxed{y = -\frac{1}{5}z + 1}$

et on en déduit x d'après $-x + 2y = -2z + 2$

$x = 2y + 2z - 2$

$x = 2(-\frac{1}{5}z + 1) + 2z - 2$

$x = -\frac{2}{5}z + 2 + 2z - 2$ donc $\boxed{x = \frac{8}{5}z}$

On pose $\boxed{z = k}$

on a : $\begin{cases} x = \frac{8}{5}k \\ y = -\frac{1}{5}k + 1 \\ z = k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ | ceci est la représentation paramétrique de la droite d'intersection de P_1 et P_2

Ex 7 Soit (d) : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 1 - k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$ et $P : x - y - z + \alpha = 0$. $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Démontrer que (d) est parallèle à P.

Vect directeur de (d) $\vec{u}(2,-1,3)$

Vect normal à P $\vec{n}(1,-1,-1)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 2 + 1 - 3 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$ et (d) // P.

2) Déterminer α pour que (d) soit incluse dans P

On cherche α pour que tous les points de (d) soient dans P.

donc $2k - (1-k) - (2+3k) + \alpha = 0$

$2k - 1 + k - 2 - 3k + \alpha = 0$

$\boxed{\alpha = 3}$

Par substitution de x, y, z dans l'équation de P.

Ex 8 Intersection d'une droite et d'un plan

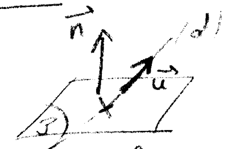
Soit la droite (d) de représentation paramétrique

$\begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = 7 + k \\ z = -1 - 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

et P le plan d'équation $-2x + 3y - z + 1 = 0$

1) Donner un vecteur directeur de (d) $\vec{u}$ et un vecteur normal à P $\vec{n}$

$\vec{u}(2,1,-2)$ $\vec{n}(-2;3,-1)$



En déduire que (d) coupe P.

(d) coupe $P \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux

$\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u} \neq 0$.

On a $\vec{n}\cdot\vec{u} = -4 + 3 + 2 = 1 \neq 0$.

donc (d) coupe P

2) Déterminer les coord de leur pt d'intersection K

$K \in (d)$ et $K \in P$.

donc par substitution de x, y, z dans l'équation de P.

$-2(-5+2k) + 3(7+k) - (-1-2k) + 1 = 0$.

$10 - 4k + 21 + 3k + 1 + 2k + 1 = 0$

$\boxed{k = -33}$ donc $x = -71$, $y = -26$, $z = 65$ $K(-71,-26,65)$

TD Plans (4)

$\boxed{Ex\ 9}$ Soit la droite (d) : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

et (Δ) passant par $C(8;-5;-6)$ de vecteur directeur $\vec{w}(1,1,-1)$

1) Démontrer que (d) et (Δ) sont orthogonales

Vecteur directeur de (d) $\vec{u}(-1,2,1)$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = -1\times1 + 2\times1 + 1\times(-1)$

$= -1+2-1$

$= 0$

donc $\vec{u} \perp \vec{w}$

donc (d) et (Δ) sont orthogonales.

2) (d) et (Δ) sont-elles sécantes ?

Représentation paramétrique de (Δ)

$\begin{cases} x = 8+t \\ y = -5+t \\ z = -6-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

On résout $\begin{cases} 2-k = 8+t \\ 1+2k = -5+t \\ k = -6-t \end{cases}$

Si ce système a une solution (en k et t) alors les droites ont un point commun

$\begin{cases} -k-t = 6 \\ 2k-t = -6 \\ k+t = -6 \end{cases}$ même équation

On a $L_1 = -L_3$ donc ces deux équations sont équivalentes.

On n'en garde donc qu'une des deux

le système à résoudre est donc

$\begin{cases} 2k-t = -6 \\ k+t = -6 \end{cases}$

Par addition des 2 équations

on a $3k = -12$ donc $\boxed{k=-4}$

Calcul de t : $t = -6-k = -6+4$

$\boxed{t=-2}$

Conclusion : il existe k et t donc les droites sont sécantes.

Rmq : Elles sont donc perpendiculaires

Rmq. Leur point d'intersection est $x = 8-2 = 6$, $y = -5-2 = -7$, $z = -6+2 = -4$

$\boxed{K(6,-7,-4)}$