DM géométrie dans l'espace

1) Coordonnées des points F, H, K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1\times\overrightarrow{AB} + 0\times\overrightarrow{AD} + 1\times\overrightarrow{AE}$

donc $\boxed{F(1,0,1)}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 0\times\overrightarrow{AB} + 1\times\overrightarrow{AD} + 1\times\overrightarrow{AE}$

donc $\boxed{H(0,1,1)}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = 0\times\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\times\overrightarrow{AD} + 0\times\overrightarrow{AE}$

donc $\boxed{K(0,\frac{1}{4},0)}$

2a) $\overrightarrow{FH}(-1,1,0)$ $\quad \overrightarrow{FK}(-1,\frac{1}{4},-1)$ $\quad \vec{n}(4,4,-3)$

$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{n} = -4+4+0 = 0$ donc $\overrightarrow{FH} \perp \vec{n}$

$\overrightarrow{FK}\cdot\vec{n} = -4+1+3 = 0$ donc $\overrightarrow{FK} \perp \vec{n}$

Conclusion $\vec{n}$ est normal au plan (FHK)

b) le plan (FHK) a une équation du type $4x+4y-3z+d=0$

$F\in$ (FHK) donc $4+0-3+d=0$

$F(1,0,1)$ $\quad d=-1$

donc le plan (FHK) a pour équation

$\boxed{4x+4y-3z-1=0}$

Vérification : (avec le point H) $H(0,1,1)$

$0+4-3-1=0$ donc équation correcte

c) $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (FHK) donc un vecteur normal à (FHK) est aussi normal à $\mathcal{P}$.

donc $\mathcal{P}$ a une équation du type $4x+4y-3z+d=0$

$I\in\mathcal{P}$ donc les coordonnées de I vérifient l'équation de $\mathcal{P}$.

I milieu de [EF] donc $x_I = \frac{x_E+x_F}{2} = \frac{1}{2}$

$E(0,0,1)$ $\quad y_I = \frac{y_E+y_F}{2} = 0$

$F(1,0,1)$ $\quad z_I = \frac{z_E+z_F}{2} = 1$

$\boxed{I(\frac{1}{2},0,1)}$

(2)

$4\times\frac{1}{2} + 4\times 0 - 3\times 1 + d = 0$

$2-3+d=0$ donc $\boxed{d=1}$

Equation de $\mathcal{P}$ $\quad \boxed{4x+4y-3z+1=0}$

3a) Représentation paramétrique de la droite (AE)

$A(0,0,0)$ $\quad \overrightarrow{AE}(0,0,1)$

$E(0,0,1)$

$$\begin{cases} x = 0 + k\times 0 \\ y = 0 + k\times 0 \\ z = 0 + k\times 1 \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$$

donc (1) $\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}}$ pour la droite (AE)

b) $\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{4x+4y-3z+1=0}$ (2)

le point d'intersection vérifie (1) et (2)

donc par substitution on a

$4\times 0 + 4\times 0 - 3\times k + 1 = 0$

$-3k = -1$

$\boxed{k=\frac{1}{3}}$

Ce qui donne le point de coordonnées

$x=0$

$y=0$ $\quad \boxed{M'(0,0,\frac{1}{3})}$

$z=\frac{1}{3}$

4a) Δ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de Δ.

$\vec{n}(4,4,-3)$ est donc un vecteur directeur de Δ

Δ passe par $E(0,0,1)$ donc Δ a pour représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$$

b) (d) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2+k \\ y = 2+k \\ z = k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

donc (d) est la droite passant par le point de coordonnées $(2,2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1,1)$

c) le point d'intersection de (Δ) et (d) est le point de coordonnées (x,y,z) tels que

$$\begin{cases} x = 2+k \\ y = 2+k \\ z = k \end{cases} \text{ pour } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1-3t \end{cases} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

donc
$$\begin{cases} 2+k = 4t \\ 2+k = 4t \\ k = 1-3t \end{cases} \iff \begin{cases} 2+k = 4t \\ k = 1-3t \end{cases} \iff \begin{cases} k-4t = -2 \\ k+3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} L_1 : & k-4t = -2 \\ -L_2 : & -k-3t = -1 \\ \hline L_1-L_2 : & -7t = -3 \end{array}$$

donc $\boxed{t = \frac{3}{7}}$

Calcul de k : $k = -2+4t$

$k = -2 + \frac{12}{7} = -\frac{2}{7}$ $\quad \boxed{k = -\frac{2}{7}}$

On a donc
$$\begin{cases} x = 2+k = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7} \\ y = 2+k = \frac{12}{7} \\ z = k = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$\boxed{R\left(\frac{12}{7} ; \frac{12}{7} ; -\frac{2}{7}\right)}$

Vérification avec $t = \frac{3}{7}$

$$\begin{cases} x = 4t = \frac{12}{7} \\ y = 4t = \frac{12}{7} \\ z = 1-3t = 1 - \frac{9}{7} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$