DM Droites dans l'espace.

1) $A(2,3,0)$ $\vec{u_1}(-1,2,3)$

(d_1) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

2) (d_2) : $$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -9-6t \\ z = -14-9t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Vecteur directeur de (d_1) : $\vec{u_1}(-1,2,3)$

Vecteur directeur de (d_2) $\boxed{\vec{u_2}(3,-6,-9)}$

On a $\boxed{\vec{u_2} = -3\vec{u_1}}$

donc (d_1) et (d_2) sont parallèles.

3) (d_3) : $$\begin{cases} x = 1-k' \\ y = 7-5k' \\ z = -7+k' \end{cases} \quad k' \in \mathbb{R}$$

a) Vecteur directeur de (d_3) $\boxed{\vec{u_3}(-1,-5,1)}$

Vecteur directeur de (d_2) $\vec{u_2}(3,-6,-9)$

$\vec{u_3} \cdot \vec{u_2} = -3+30-9 = \boxed{18}$

$\vec{u_3} \cdot \vec{u_2} \neq 0$

donc (d_2) et (d_3) ne sont pas orthogonales.

b) Démontrons que (d_2) et (d_3) sont sécantes.

$M(x,y,z) \in (d_2) \cap (d_3) \Leftrightarrow$ il existe t et k' tels que

$$\begin{cases} 2+3t = 1-k' \\ -9-6t = 7-5k' \\ -14-9t = -7+k' \end{cases}$$

Ce système s'écrit $$\begin{cases} 3t+k' = -1 \\ -6t+5k' = 16 \\ -9t-k' = 7 \end{cases}$$

① On résout $$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3t+k' = -1 \\ -6t+5k' = 16 \end{cases}$$

* On a : $2L_1$: $6t+2k' = -2$

L_2 : $-6t+5k' = 16$

$2L_1+L_2$: $7k' = 14$

$\boxed{k' = 2}$

* Calcul de t

D'après L_1 : $3t+2 = -1$

$3t = -3$ $\boxed{t = -1}$

② $k' = 2$, $t = -1$ vérifient-ils la 3ème équation ?

$-9t-k' = 9-2 = 7$ $\boxed{\text{oui}}$

③ Conclusion : le système a pour solution $\boxed{k' = 2, \ t = -1}$

donc les droites sont sécantes (car il existe un point d'intersection)

$k' = 2$ donc $x = 1-k' = 1-2 = -1$

$y = 7-5k' = 7-10 = -3$

$z = -7+k' = -7+2 = -5$

$\boxed{K(-1,-3,-5)}$

Vérification avec $t = -1$

$x = 2+3t = 2-3 = -1$

$y = -9-6t = -9+6 = -3$

$z = -14-9t = -14+9 = -5$

4) $B(4,7,3)$ (d_4) parallèle à (d_3)

donc (d_4) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_3}(-1,-5,1)$

On a : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+5t \\ z = 5-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $(*)$

Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{v}(1,5,-1)$

on a $\vec{v} = -\overrightarrow{u_3}$

donc cette droite est parallèle à (d_4)

Pour montrer que cette droite est la droite (d_4) il suffit de montrer qu'elles ont un point commun.

On a : $B(4,7,3) \in (d_4)$

Montrons que B appartient aussi à la droite donnée.

On remarque que $x_B = 4$

ceci possible pour $t = 2$

et pour $t = 2$ on a $y = -3+5t$

$y = -3+10 = 7$

et pour $t = 2$ on a $z = 5-t$

$z = 5-2 = 3$

Pour $t = 2$ on a le point $(4,7,3)$

c'est à dire B appartient à la droite donnée et à la droite (d_4)

Conclusion : les 2 droites sont les mêmes.