$A(1,-1,2)$ $B(3,3,8)$ $C(-3,5,4)$ $D(1,2,3)$

Droite (d) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ Vecteur directeur $\vec{u}\,(1,2,3)$

Droite (d') $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 3+k \\ z = 4-k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ Vecteur directeur $\vec{u}'\,(1,1,-1)$

$\mathcal{P}$ plan d'équation $x+y-z+2=0$
Vecteur normal $\vec{n}\,(1,1,-1)$

Question 1 :

a) $B \in (d)$? $t+1 = x_B$
$t+1 = 3$ pour $t=2$
or pour $t=2$ on a $\begin{cases} x = 3 \\ y = \cancel{5}\ 3 \\ z = \cancel{4}\ 8 \end{cases}$ $\cancel{B \notin (d)}$

~~FAUX~~ VRAI B appartient à (d)

b) $(d) \parallel (d')$? $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires
donc (d) et (d') ne sont pas parallèles
$\boxed{\text{FAUX}}$

c) $(d) \perp (d')$? $\vec{u}\cdot\vec{u}' = 1+2-3 = 0$
donc $\vec{u} \perp \vec{u}'$ et $(d) \perp (d')$
$\boxed{\text{VRAI}}$

d) (d) et (d') sécantes ?
Ont-elles un point commun ?
Peut-on avoir (x,y,z) tels que $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+2 \end{cases}$

et $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 3+k \\ z = 4-k \end{cases}$?

Donc peut-on trouver t et k
tels que $\begin{cases} t+1 = 1+k \\ 2t-1 = 3+k \\ 3t+2 = 4-k \end{cases}$? càd $\begin{cases} t-k = 0 \\ 2t-k = 4 \\ 3t+k = 2 \end{cases}$

(2)

① On résout les 2 premières équations.
$\begin{cases} t = k \\ 2t - k = 4 \end{cases}$ Par substitution dans L_2
$2k - k = 4$
$k = 4$
donc $t = 4$

② Ces valeurs vérifient-elles la 3ème équation ?
$3t + k = 12 + 4 = 16 \neq 2$ non.

③ Donc le système n'a pas de solution.
donc les droites ne sont pas sécantes $\boxed{\text{FAUX}}$

Question 2

Texte

a) $\mathcal{P}$ contient (d) ?
Prenons 2 points de (d)
$t=0 \longrightarrow (1,-1,2)$ point A.
$t=1 \longrightarrow (2,1,5)$ point E

$A \in \mathcal{P}$? : $x+y-z+2 = 1-1-2+2 = 0$
donc $A \in \mathcal{P}$.

$E \in \mathcal{P}$? $x+y-z+2 = 2+1-5+2 = 0$
donc $E \in \mathcal{P}$.

Conclusion (AE) est contenue dans $\mathcal{P}$
(c'est à dire la droite (d))
$\boxed{\text{VRAI}}$

b) $(\mathcal{P}) \parallel (d')$?
$\vec{n}\cdot\vec{u}' = 1+1+1 = 3 \neq 0$
donc (d') n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$
donc $\boxed{\text{FAUX}}$

c) $(d') \perp \mathcal{P}$?
$\vec{u}' = \vec{n}$ donc $\vec{u}'$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$
donc $(d') \perp \mathcal{P}$.
$\boxed{\text{VRAI}}$

Question 3 :

a) A, B, C alignés ?

$\vec{AB}\,(0, 3, 1)$ $\vec{AC}\,(-4, 6, 2)$

Vecteurs non colinéaires donc point non alignés

$\boxed{\text{FAUX}}$

b) triangle ABC rectangle en A ? $\vec{AB}\,(2 ~~6~~ ~~2~~)$ (2 ; 4 ; 6)

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\cancel{8 + 36 + 4 = 32} \neq 0.$ = 28 ≠0

donc (AB) non orthogonal à (AC)

donc $\widehat{BAC} \neq 90°$

c) triangle ABC équilatéral? $\boxed{\text{FAUX}}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

ou $AB = \|\vec{AB}\| = \cancel{\sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2}} = \cancel{\sqrt{4+36+4}} = \cancel{\sqrt{44} = 2\sqrt{11}}$ $\sqrt{56}$

$\vec{BC}$ (-6 ; 2 ; -4) $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$

BC $=\sqrt{56}$ $\cancel{AB \neq AC}$

donc triangle non équilatéral $\boxed{\cancel{\text{FAUX}}}$ VRAI

d) D milieu de [AB] ?

$\dfrac{x_A + x_B}{2} = 2$ $\dfrac{y_A + y_B}{2} = 1$ $\dfrac{z_A + z_B}{2} = 5$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Question 4 :

$\mathcal{P}'$ plan contenant (d') et passant par A.

a) $\vec{n}\,(-1, 5, 4)$ normal à $\mathcal{P}'$?

$\vec{n} \cdot \vec{u}' = -1 + 5 - 4 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}'$

⚠ Cela ne suffit pas !

Il faut l'orthogonalité avec 2 vecteurs du plan non colinéaires

$M(1, 3, 4) \in (d')$ donc (AM) est contenue dans le plan $\mathcal{P}'$.

$\vec{AM}\,(0, 4, 2)$

$\vec{AM}$ non colinéaire à $\vec{n}$.

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 + 20 + 8 \neq 0$ donc $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux

Conclusion : $\vec{n}$ n'est pas normal au plan $\mathcal{P}'$.

$\boxed{\text{FAUX}}$