Démontrer des inégalités

1) Démontrer que pour tous réels x, on a $\boxed{16x^2+8x+20 \geq 11}$

On a $16x^2+8x+20-11 = 16x^2+8x+9$

$$= \underbrace{(4x)^2+2\times 4x\times 1+1}\overbrace{-1+9}^{}_{+8}$$

$$= (4x+1)^2+8$$

$(4x+1)^2+8 \geq 0$

donc $16x^2+8x+20-11 \geq 0$

et donc $16x^2+8x+20 \geq 11$

2) Démontrer que pour tous a et b, on a $\boxed{a^2+b^2 \geq 2ab}$

On a : $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$

donc $a^2+b^2-2ab \geq 0$

donc $a^2+b^2 \geq 2ab$.

3) Démontrer que pour tous réels t, $\boxed{t+1 \leq \frac{1}{4}t^2+2}$

On a $\frac{1}{4}t^2+2-(t+1) = \frac{t^2}{4}+2-t-1 = \frac{t^2}{4}-t+1$

$$= \frac{t^2-4t+4}{4} = \frac{(t-2)^2}{4} \geq 0$$

donc $\frac{1}{4}t^2+2-(t+1) \geq 0$

et $\frac{1}{4}t^2+2 \geq t+1$

4) Démontrer que pour tous réels $x>0$, on a : $\boxed{x+\frac{1}{x} \geq 2}$

On a $x+\frac{1}{x}-2 = \frac{x^2+1-2x}{x}$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Comme $x>0$ et $(x-1)^2 \geq 0$

On a donc $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

donc $x+\frac{1}{x}-2 \geq 0$

et donc $x+\frac{1}{x} \geq 2$

280420