290420.

Distance dans l'espace

Ex1 $\mathcal{P} : -x + 2y + 3z - 11 = 0$

1) $\vec{n}(-1, 2, 3)$ est normal à $\mathcal{P}$.
(d) $\perp$ $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d)
(d) passe par $A(2, -3, 4)$ donc (d) a pour représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -3 + 2k \\ z = 4 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.}$$

2) a) H est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (d) donc on résout

$$-(2-k) + 2(-3+2k) + 3(4+3k) - 11 = 0$$
$$-2 + k - 6 + 4k + 12 + 9k - 11 = 0.$$
$$-8 + 5k + 1 + 9k = 0$$
$$14k = 7$$
$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

donc $x = 2 - k = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$y = -3 + 2k = -3 + 1 = -2$
$z = 4 + 3k = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$

$\boxed{H\left(\frac{3}{2} ; -2 ; \frac{11}{2}\right)}$

Vérification: $-\frac{3}{2} - 4 + \frac{33}{2} - 11 = -15 + \frac{30}{2} = 0$
donc $H \in \mathcal{P}$.

b) On a donc $\text{dist}(A, \mathcal{P}) = AH$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + (-2+3)^2 + \left(\frac{11}{2}-4\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}}$$
$$= \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

Ex 2

$A(-1,2,3)$

(d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t \\ z = 2+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Méthode 1 : 1) $\vec{u}(4,1,2)$ vecteur directeur de (d)

(d) $\perp$ $\mathcal{P}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ a pour équation $4x+y+2z+d=0$

$A \in \mathcal{P}$ donc $-4+2+6+d=0$

$d=-4$

$\mathcal{P}$: $\boxed{4x+y+2z-4=0}$

Autre méthode : $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ | $\vec{AM}(x+1, y-2, z-3)$

$\iff \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$\iff 4(x+1)+y-2+2(z-3)=0$

$\iff 4x+4+y-2+2z-6=0$

$\iff 4x+y+2z-4=0$

2) a) H point d'intersection de (d) avec $\mathcal{P}$

donc on résout

$4(9+4t)+6+t+2(2+2t)-4=0$

$36+16t+6+t+\cancel{4}+4t-\cancel{4}=0$

$21t+42=0$

$t=-2$

donc $x = 9+4t = 9-8 = 1$

$y=6+t=6-2=4$ $\quad \boxed{H(1,4,-2)}$

$z=2+2t=2-4=-2$

Vérification $4+4-4-4=0$ donc $H \in \mathcal{P}$.

b) $\text{dist}(A,(d)) = AH = \sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2+(-2-3)^2}$

$= \sqrt{2^2+2^2+(-5)^2}$

$= \sqrt{4+4+25} = \boxed{\sqrt{33}}$

Méthode 2

1) $M \in (d)$ donc $M(9+4t\,;\,6+t\,;\,2+2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

$A(-1,2,3)$

donc $AM = \sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$= \sqrt{(10+4t)^2+(4+t)^2+(2t-1)^2}$

$= \sqrt{100+80t+16t^2+16+8t+t^2+4t^2-4t+1}$

$= \sqrt{21t^2+84t+117}$.

donc $\boxed{AM^2 = 21t^2+84t+117}$

2) On note $f(t) = 21t^2+84t+117$ avec $t \in \mathbb{R}$

On cherche le maximum de f sur $\mathbb{R}$

$f'(t) = 42t+84$

$f'(t) = 0 \iff 42t+84 = 0$

$\iff t = -2$

$f'(t) > 0 \iff 42t+84 > 0$

$\iff 42t > -84$

$\iff t > -2$

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint pour $t=-2$

et vaut $f(-2) = 21(-2)^2+84\times(-2)+117$

$= 84-168+117$

$= 201-168$

$= 33$.

donc AM^2 est maximal pour $t=-2$

et le maximum est égal à 33

donc AM est maximal pour $t=-2$

et le maximum est égal à $\sqrt{33}$

En effet

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
AM^2		↗	33	↘	
$AM=\sqrt{AM^2}$		↗	$\sqrt{33}$	↘	

} car la fonction racine carrée est croissante donc

si $AM^2 \nearrow$ $\sqrt{AM^2} \nearrow$

si $AM^2 \searrow$ $\sqrt{AM^2} \searrow$