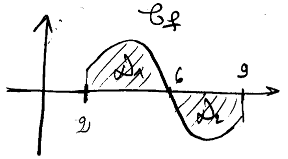
III Calcul d'aires : TD Intégrale d'une fonction continue (5)

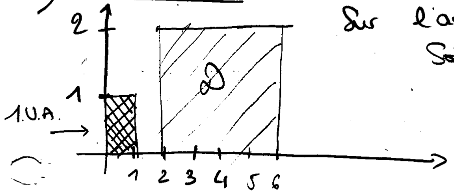
1) Cas d'une fonction de signe non constant sur $[a,b]$



Aire hachurée = Aire($\mathcal{D}_1$) + Aire($\mathcal{D}_2$)

$$= \int_2^6 f(x)\,dx - \int_6^9 f(x)\,dx$$

2) Unité d'aire :



Sur l'axe des abscisses Unité 0,5 cm

Sur l'axe des ordonnées Unité 1,5 cm.

Soit $f(x) = 2$ sur $[2,6]$

Aire $(\mathcal{D}) = \int_2^6 f(x)\,dx$.

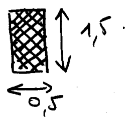
ou Aire $(\mathcal{D}) = L \times l = 4 \times 2 = 8$

[1 unité d'aire]

$\boxed{\text{Aire}(\mathcal{D}) = 8.\ \text{U.A}}$

unité d'aire.

1.U.A est l'aire du rectangle de côté 1 sur l'axe des abscisses et de côté 1 sur l'axe des ordonnées.



$1.\ \text{U.A} = 1,5 \times 0,5\ \text{cm}^2$

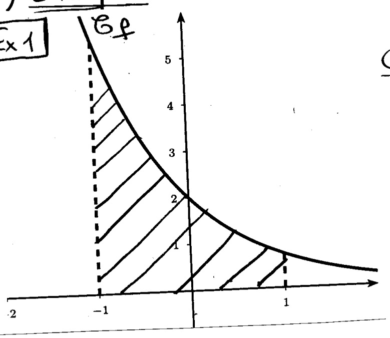
$\boxed{1.\text{U.A} = 0,75\ \text{cm}^2}$

donc $\boxed{\text{Aire}(\mathcal{D}) = 8.\text{U.A}}$

ou Aire $(\mathcal{D}) = 8 \times 0,75\ \text{cm}^2 = \boxed{6\ \text{cm}^2}$

3) Exemples

Ex 1



$f(x) = 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Calculer l'aire hachurée $\mathcal{A}$ en cm^2

unité sur l'axe des abscisses : 2 cm

unité sur l'axe des ordonnées : 1 cm.

Comme $f(x) \geq 0$ sur $[-1,1]$

on a $\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

TD Intégrales (6)

$f(x) = 2e^{-x} = -2 \times (-1)\,e^{-x}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} u' e^{u} \\ \text{Primitive } e^{u} \end{array} \right.$

$F(x) = -2e^{-x}$

donc $\mathcal{A} = \left[F(x) \right]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)$

$= -2e^{-1} + 2e^{1}$

$\boxed{\mathcal{A} = -\frac{2}{e} + 2e\ \text{U.A}}$

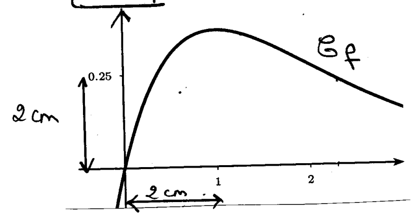
$1.\text{UA} = 2 \times 1\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2$

et $\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{e} + 2e\right) \times 2\ \text{cm}^2$

$\boxed{\mathcal{A} = -\frac{4}{e} + 4e\ \text{cm}^2}$

$\boxed{\mathcal{A} \simeq 9,4\ \text{cm}^2}$

Ex 2



$f(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

1) Soit $g(x) = -(x+1)e^{-x}$. Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2) Calculer $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

3) Donner une interprétation graphique du résultat.

4) Donner une valeur approchée de I à 10^{-2} près en cm^2.

---

1) $g(x) = -(x+1)\,e^{-x}$

$g'(x) = -1 \times e^{-x} - (x+1) \times e^{-x} \times (-1)$

$g'(x) = e^{-x}(-1 + x + 1)$

$g'(x) = x e^{-x}$

$g'(x) = f(x)$

donc g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

TD Intégrales (7)

2) $I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[g(x)\right]_0^2 = g(2) - g(0)$

$= -(2+1)e^{-2} - (-1e^0)$

$= -3e^{-2} + 1$

$\boxed{I = 1 - 3e^{-2}}$

3) Sur $[0, 2]$ $f(x) \geq 0$ donc I est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$

4) $1\ UA = 2 \times 8\ cm^2$
$= 16\ cm^2$

⚠ Sur l'axe (oy)
$0,25 \longleftrightarrow 2\,cm$.
$1 \longleftrightarrow 4 \times 2\,cm$.

Donc $I = (1 - 3e^{-2}) \times 16\ cm^2$

$\boxed{I \simeq 9,5\ cm^2}$

IV Propriétés des intégrales :

1) Signe :

♡ Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
Si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

2) Relation de Chasles :

♡ Pour tous réels a, b, c
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

3) ♡
① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(Si on inverse les bornes de l'intégrale, on change le signe de l'intégrale)

TD Intégrales (8)

4) Somme de 2 intégrales sur $[a, b]$

Prop: ♡ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) + g(x)\,dx}$

Preuve : Si F est une primitive de f sur $[a, b]$
et G ——— g ———
alors $F + G$ ——— $f + g$ sur $[a, b]$

donc $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \left[F(x) + G(x)\right]_a^b$
$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a))$
$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$
$= \left[F(x)\right]_a^b + \left[G(x)\right]_a^b$
$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

5) Intégrale de kf sur $[a, b]$ $\quad k \in \mathbb{R}$

Prop ♡ $\boxed{\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$

Preuve : Si F primitive de f sur $[a, b]$
alors kF ——— kf ———

$\int_a^b kf(x)\,dx = \left[kF(x)\right]_a^b = kF(b) - kF(a)$
$= k(F(b) - F(a))$
$= k\left[F(x)\right]_a^b$
$= k\int_a^b f(x)\,dx$.

Rmq : $\int_a^b f(x)\,dx \overset{+(-1)}{-} \int_a^b g(x)\,dx$
$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b -g(x)\,dx$
$= \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

3) Comparaison d'intégrals :

Prop. ♡ Si pr # x de $[a, b]$ $f(x) \leq g(x)$
alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Preuve : Si pour tous x de $[a,b]$ $f(x) \leq g(x)$
alors $f(x) - g(x) \leq 0$.
donc $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx \leq 0$.
(d'après prop 1)
donc $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0$ (d'après prop. 5)
donc $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

V Exercices :

Ex 1 Soient $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

1) Calculer I
2) Calculer $I + J$ puis en déduire J

Ex 2 Soit la fonction tangente définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1) Montrer que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
où $\tan'$ est la dérivée de tan.
2) Soient $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^2 x\, dx$
a) Calculer I
b) Calculer $I - J$ puis en déduire J.

4) Exercices

Ex 1 Soient $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

$\frac{u'}{u}$

1) Calculer I.

$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

$I = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1$

$\boxed{I = \frac{1}{2} \ln 2}$

$f(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

2) Calculer $I + J$ puis en déduire J.

$I + J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

$= \int_0^1 \frac{x + x^3}{1+x^2} dx$

$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$

On a donc $J = \frac{1}{2} - I$

$J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

$\boxed{J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)}$

TD Intégrales (M)

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Soit la fonction tangente définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) Montrer que $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2) Soient $I = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^2 x\,dx$

a) Calculer I

b) Calculer $I - J$ puis en déduire J

a) $I = \left[\tan x\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sin \pi/3}{\cos \pi/3} - \frac{\sin \pi/4}{\cos \pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} - 1 = \boxed{\sqrt{3} - 1}$$

b) $I - J = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x\,dx$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} 1\,dx$$

$$= \left[x\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

Donc $J = I - \dfrac{\pi}{12}$

$$\boxed{J = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}}$$