Rmq: ① La notation $\int_a^b f(x)\,dx$ est appelée intégrale de f de a à b.

② Dans le cas où f est positive $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

II Méthode de calcul d'une intégrale pour f continue sur $[a,b]$

1) Rappel : Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet des primitives sur $[a,b]$

2) Théorème (admis)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a,b]$

Rmq : Cela ne dépend pas de la primitive choisie. en effet si F et G sont deux primitives de f sur $[a,b]$ alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x de $[a,b]$ $F(x) = G(x) + k$

donc $F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k)$
$= G(b) - G(a)$

Rédaction : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple : $\int_1^2 x + 3\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2$
$= \frac{4}{2} + 6 - \left(\frac{1}{2} + 3\right)$
$= 8 - \frac{1}{2} - 3$
$= 5 - \frac{1}{2}$
$= \boxed{\frac{9}{2}}$

3) Exercice :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-1}^{1} 4x^2 - x + 1\,dx$

2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\,dx$

3) $\int_1^4 \frac{3}{x^2} - 2x^3\,dx$

4) $\int_1^4 \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{e^x}{2}\,dx$

5) $\int_0^3 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

6) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}\,dx$

7) $\int_{-1}^{1} e^{-3x+1}\,dx$

---

1) $\int_{-1}^{1} 4x^2 - x + 1\,dx = \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$
$= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)$
$= \frac{4}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{4}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{8}{3} + 2 = \boxed{\frac{14}{3}}$

2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} - 2x^3\,dx = \left[-\frac{3}{x} - 2\times\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[-\frac{3}{x} - \frac{x^4}{2}\right]_1^2$
$= -\frac{3}{2} - \frac{16}{2} - \left(-3 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - 8 + 3 + \frac{1}{2}$
$= -1 - 8 + 3 = \boxed{-6}$

4) $\int_1^4 \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{e^x}{2}\,dx$
$= \left[5\times 2\sqrt{x} + \frac{e^x}{2}\right]_1^4 = \left[10\sqrt{x} + \frac{e^x}{2}\right]_1^4 = 20 + \frac{e^4}{2} - \left(10 + \frac{e}{2}\right)$
$= \boxed{10 + \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}}$

TD Intégrale (4)

5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

$= \left[\frac{3}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^3$

$= \frac{3}{2}\ln(10) - \frac{3}{2}\ln(1)$

$= \boxed{\frac{3}{2}\ln(10)}$

$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

$f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$

$F(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

car $x^2+1>0$

$\frac{u'}{u}$	$\ln u$

avec $u>0$

$\frac{2x}{x^2+1}$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}\,dx$

$= \left[\frac{1}{7}\sqrt{7x^2+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{7}\sqrt{8} - \frac{1}{7}\sqrt{1}$

$= \frac{1}{7}\times 2\sqrt{2} - \frac{1}{7}$

$= \boxed{\frac{1}{7}(2\sqrt{2}-1)}$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}$

$f(x) = \frac{1}{14} \times \frac{14x}{\sqrt{7x^2+1}}$

$F(x) = \frac{1}{14} \times 2\sqrt{7x^2+1}$

$F(x) = \frac{1}{7}\sqrt{7x^2+1}$

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

$\frac{14x}{\sqrt{7x^2+1}}$

7) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-3x+1}\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}e^{-3x+1}\right]_{-1}^1$

$= -\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^4$

$= \boxed{\frac{1}{3}(e^4 - e^{-2})}$

$f(x) = e^{-3x+1}$

$f(x) = \frac{1}{-3}\times(-3e^{-3x+1})$

$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1}$

$u'e^u$	e^u
$-3e^{-3x+1}$	