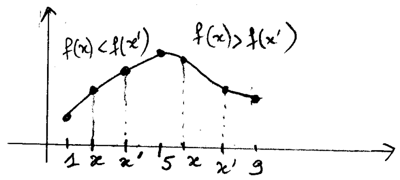
TD (9)

Rappel :




① $f$ définie sur $[1, 9]$

② $f$ croissante sur $[1,5]$
"quand $x$ augmente, $f(x)$ augmente"
Si $x, x'$ sont dans $[1,5]$
avec $x < x'$
alors $f(x) < f(x')$ } le sens de l'inégalité n'a pas changé

③ $f$ décroissante sur $[5,9]$
"quand $x$ augmente, $f(x)$ diminue"
Si $x, x'$ sont dans $[5, 9]$
avec $x < x'$
alors $f(x) > f(x')$ } le sens de l'inégalité a changé

Propriété

♡ Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
Si $a > 0$ $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$
Si $a < 0$ $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Preuve :

Soient $x$ et $x'$ deux réels tels que $x < x'$

① Si $a > 0$, on va démontrer que $f(x) < f(x')$

Pour cela on va démontrer que $f(x) - f(x') < 0$

On a $f(x) = ax + b$
$f(x') = ax' + b$

donc $f(x) - f(x') = ax + \cancel{b} - ax' - \cancel{b}$ ] on factorise.
$= \underbrace{a}_{\oplus}\underbrace{(x - x')}_{\ominus}$ car $x < x'$ donc $x - x' < 0$

donc $f(x) - f(x') < 0$
donc $f(x) < f(x')$
et donc $f$ croissante sur $\mathbb{R}$

TD (10)

② Si $a < 0$, et $x < x'$ on va démontrer que $f(x) > f(x')$

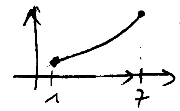
Pour cela on va démontrer que $f(x) - f(x') > 0$.
On a $f(x) - f(x') = \underbrace{a}_{\ominus}\underbrace{(x - x')}_{\ominus}$ car $x < x'$ donc $x - x' < 0$
donc $f(x) - f(x') > 0$
et donc $f(x) > f(x')$
et donc $f$ décroissante sur $\mathbb{R}$.

Rmq :

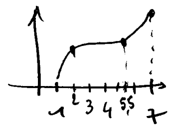
① Si pour tous réels $x$ et $x'$ dans $[a,b]$ tels que $x < x'$ on a $f(x) \leq f(x')$ on dit que $f$ est croissante sur $[a,b]$ (certaines images peuvent être égales)

② Si pour tous réels $x$ et $x'$ dans $[a,b]$ tels que $x < x'$ on a $f(x) < f(x')$ on dit que $f$ est strictement croissante sur $[a,b]$ (toutes les images sont différentes)

Exemple :




$f$ strictement croissante sur $[1,7]$




$f$ croissante sur $[1;7]$
$f(3) = f(4)$
donc $f(3) \leq f(4)$

Rmq : $f$ strictement croissante sur $[1;2]$ et sur $[5,5;7]$
$f$ constante sur $[2;5,5]$

Rmq : On a donc démontré qu'une fonction affine est strictement croissante ou strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ mais on peut dire aussi qu'elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$
(ce qui est moins précis mais correct tout de même)