TD 10 Fonction affine

I Définition et propriété :

1) Définition :

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) = ax + b.$$

2) Cas particuliers

- si $a = 0$: $f(x) = b$; f est une fonction **constante**
- si $b = 0$: $f(x) = ax$; f est une fonction **linéaire**

3) Exercice

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Soit $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ sur $\mathbb{R}$

1) Justifier que f est affine

2) a) Calculer $\frac{f(4) - f(6)}{4 - 6}$

b) Calculer $\frac{f(\frac{1}{2}) - f(-3)}{\frac{1}{2} - (-3)}$

c) Calculer $\frac{f(0) - f(2)}{0 - 2}$

d) Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

e) Démontrer la conjecture.
Pour cela vous calculerez $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ pour deux réels x et x' quelconques.

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Correction

1) $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ donc $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

f est affine car de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -3$

2) a) $\frac{f(4) - f(6)}{4 - 6} = \frac{-1 - 0}{-2} = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{f(\frac{1}{2}) - f(-3)}{\frac{1}{2} - (-3)} = \frac{(\frac{1}{4} - 3) - (-\frac{3}{2} - 3)}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{-\frac{11}{4} - (-\frac{9}{2})}{\frac{7}{2}}$

$= \frac{-\frac{11}{4} + \frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{7}$

$= \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

c) $\frac{f(0) - f(2)}{0 - 2} = \frac{-3 - (-2)}{-2} = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

d) Il semble que pour tous réels x et x', on ait
$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{1}{2}$

e) Preuve de la conjecture :

$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{\frac{x}{2} - 3 - (\frac{x'}{2} - 3)}{x - x'}$

$= \frac{\frac{x}{2} - 3 - \frac{x'}{2} + 3}{x - x'}$

$= \frac{\frac{x}{2} - \frac{x'}{2}}{x - x'} = \frac{\frac{x - x'}{2}}{x - x'}$

$= \frac{\cancel{x - x'}}{2} \times \frac{1}{\cancel{x - x'}} = \frac{1}{2}$

4) Propriété :

Si f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$
alors pour tous réels x et x', $x \neq x'$
on a $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'} = a}$

Remarques ① Pour une fonction f quelconque définie sur $\mathbb{R}$
$\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ est appelé taux de variation ou
taux d'accroissement de f entre x et x'
$(x \neq x')$

Si f est affine, ce taux est constant

② Notation : $\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a}$

Δx : signifie " variation entre les x "
$\Delta x = x - x'$
Δy : variation entre les y (c'est à dire entre les images)
⚠ à l'ordre des termes :
si $\Delta x = x - x'$
alors $\Delta y = y - y' = f(x) - f(x')$

5) Vocabulaire :

Si $f(x) = ax + b$ sur $\mathbb{R}$
alors a est appelé coefficient directeur de f.
et $\boxed{a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$
et b est appelé ordonnée à l'origine de f
$\boxed{b = f(0)}$

II Exercices :

Ex 2 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ affine telle que $f(2) = 4$ et $f(-5) = 3$.
Déterminer l'expression de $f(x)$
Méthode : 1) Calculer a.
2) En déduire b.

Ex 3 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que
$f(7) = -2$, $f(5) = 4$ et $f(3) = -4$
Démontrer que f n'est pas affine.

Ex 4 Soit f affine de coefficient directeur 7 et d'ordonnée à l'origine 2
Calculer $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Ex 5 Soit f affine de coefficient directeur 5
1) Si x augmente de 4, de combien augmente y ?
2) De combien faut-il diminuer x pour que y diminue de 6 ?

TD (5)

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $f(2)=4$ $f(-5)=3$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(-5)}{2-(-5)} = \frac{4-3}{2+5} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

donc $f(x) = \frac{1}{7}x + b$

D'après $f(2)=4$ on a $\frac{1}{7}\times 2 + b = 4$

donc $b = 4 - \frac{2}{7} = \frac{26}{7}$

Conclusion $\boxed{f(x) = \frac{1}{7}x + \frac{26}{7}}$

Rmq: Vérification avec $f(-5)=3$

$$f(-5) = \frac{1}{7}\times(-5) + \frac{26}{7} = \frac{-5}{7} + \frac{26}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $f(7) = -2$, $f(5)=4$ et $f(3) = -4$

$$\frac{f(7)-f(5)}{7-5} = \frac{-2-4}{7-5} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{-2+4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Nombres différents

donc $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ n'est pas constant

donc f n'est pas affine.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $a=7$ $b=2$ donc $f(x) = 7x+2$

et $f\left(\frac{1}{3}\right) = 7\times\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} + 2 = \boxed{\frac{13}{3}}$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ $a=5$

donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$

1) si x augmente de 4 alors $\Delta x = 4$ et $\Delta y = 5\times\Delta x$

$\Delta y = 20$

donc y augmente de 20

2) si y diminue de 6 alors $\Delta y = -6$

et $\Delta x = \frac{\Delta y}{5} = \frac{-6}{5} = -\frac{12}{10} = -1{,}2$

donc il faut diminuer x de 1,2

pour que y diminue de 6.