VI Vecteurs coplanaires. (Voir II)

1) Remarque

2 vecteurs sont toujours coplanaires

2) Comment démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires.

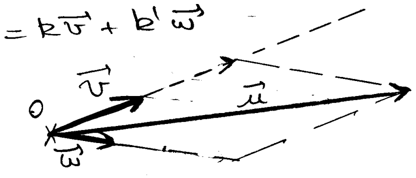
propriété :

♡ Si il existe deux réels k, k' tels que $\boxed{\vec{u} = k\vec{v} + k'\vec{w}}$ alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

propriété : Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires

♡ et si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires alors il existe k et k' réels tels que $\vec{u} = k\vec{v} + k'\vec{w}$

Exemple :



$\vec{u} = 2\vec{v} + 3\vec{w}$

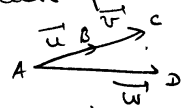
Remarque : cela revient à considérer le repère $(O, \vec{v}, \vec{w})$ et le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2, 3)$ dans ce repère.

Méthode : Exemple :

$\vec{u}(2, 3, -1)$ $\vec{v}(-2, -1, 2)$ $\vec{w}(-10, -9, 8)$

Rmq : Si deux vecteurs sont colinéaires, les 3 sont alors forcément coplanaires.

Ex :



A, B, C, D coplanaires donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires

$\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires (pour x : $\times(-1)$ pas pour y)

$\vec{v}, \vec{w}$ non colinéaires (pour x : $\times 5$ pas pour y)

$\vec{u}, \vec{w}$ non colinéaires (pour x : $\times(-5)$ pas pour y)

Donc peut-on trouver k et k' tels que $\vec{u} = k\vec{v} + k'\vec{w}$?

On a $\vec{u} = k\vec{v} + k'\vec{w}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k'\begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2k - 10k' = 2 \\ -k - 9k' = 3 \\ 2k + 8k' = -1 \end{cases}$$

Système de 2 inconnues (k et k') à 3 équations.

On résout un système de 2 équations à 2 inconnues puis on regarde si les valeurs trouvées pour k et k' vérifient la 3ème équation

$$\begin{cases} -2k - 10k' = 2 \\ -k - 9k' = 3 \end{cases}$$

On calcule $L_1 - 2L_2$:

$$\begin{array}{r} -2k - 10k' = 2 \\ 2k + 18k' = -6 \\ \hline 8k' = -4 \\ k' = -\frac{4}{8} \end{array} \qquad \boxed{k' = -\frac{1}{2}}$$

Puis on calcule k

D'après L_2 :

$$-k - 9k' = 3$$
$$-k + \frac{9}{2} = 3$$
$$-k = 3 - \frac{9}{2}$$
$$-k = -\frac{3}{2}$$
$$\boxed{k = \frac{3}{2}}$$

$k = \frac{3}{2}$, $k' = -\frac{1}{2}$ sont-elles solution du système ?

Vérifient-elles la 3ème équation ?

L_3 : $2k + 8k' = 2 \times \frac{3}{2} + 8 \times \frac{-1}{2}$
$= 3 - 4$
$= -1$ oui.

Donc $k = \frac{3}{2}$ $k' = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}}$ donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

VII Représentation paramétrique d'une droite ou d'un plan.

1) D'une droite :

a) Soit la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec $\vec{u}(a, b, c)$

On a : $M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\iff$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Propriété : la droite (d) passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ a pour représentation paramétrique

♡

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

b) Exemple : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = -k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

① Ceci est la représentation paramétrique de la droite passant par $A(2, -1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 3, -1)$

② Trouver le point B de cette droite qui a pour abscisse 3

$x = 3$ donc $k = 1$

donc $y = -1 + 3 = 2$

$z = -1$

$\boxed{B(3, 2, -1)}$

③ le point $C(4, 5, 3)$ appartient-il à la droite ?

$x = 4$ donc $k = 2$

$y = 5$ donc $-1 + 3k = 5$ donc $k = 2$

$z = 3$ donc $-k = 3$ donc $k = -3$ $\neq$

On trouve 2 valeurs différentes de k, ce qui n'est pas possible donc C n'appartient pas à la droite.

c) Application :

A partir de représentation paramétrique de deux droites (d_1) et (d_2) on peut savoir si les deux droites sont

① parallèles (vecteurs directeurs colinéaires)

② orthogonales (vecteurs directeurs orthogonaux)

③ sécantes (en cherchant un point commun)

⚠ Dans l'espace, deux droites non parallèles ne sont pas forcément sécantes (elles peuvent être non coplanaires !)