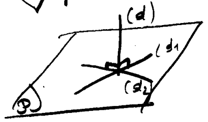
VIII Equation cartésienne d'un plan.

1) Droite orthogonale à un plan

Déf°: Une droite (d) est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes.

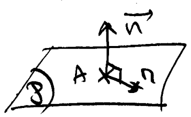


(d) ⊥ P
car (d) ⊥ (d₁) et (d) ⊥ (d₂) avec (d₁) et (d₂) inclus dans P.

propriété: Si une droite (d) est orthogonale au plan P alors elle est orthogonale à toute droite du plan P.

2) Vecteur normal à un plan :

Déf°: $\vec{n}$ est normal au plan P si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.



3) Equation cartésienne d'un plan P dans un RON de l'espace

Soit un plan P passant par le pt A et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

$$M(x,y,z) \in P \iff \vec{AM} \perp \vec{n}$$
$$\iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\iff (x-x_A) \times a + (y-y_A) \times b + (z-z_A) \times c = 0$$
$$\iff ax + by + cz \underbrace{- ax_A - by_A - cz_A}_{d} = 0$$

propriété. Dans un RON de l'espace, un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$

a, b, c, d réels
a, b, c non nuls en même temps

prop: Dans un RON de l'espace, si un plan P a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal au plan P

4) Exemples d'utilisation d'une équation cartésienne d'un plan P.

① Un point A appartient au plan P si les coordonnées de A vérifient l'équation du plan.

② Un vecteur $\vec{u}$ est normal au plan P si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$ normal à P

TD19

③ On peut savoir si une droite est parallèle ou sécante au plan P. en utilisant un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan P.
(On peut ensuite trouver le point d'intersection)

④ On peut savoir si deux plans sont parallèles ou sécants en utilisant un vecteur normal de chacun des plans.
(On peut ensuite trouver une représentation paramétrique de la droite d'intersection.)

5) Exercices :

Ex 1 Soit $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z - 4 = 0$

1) $A(2, -3, 1)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

$2 \times 2 + 3 + 1 - 4 = 4 \neq 0$

donc $A \notin \mathcal{P}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, $B(a, a, 1)$

Déterminer a pour que B appartienne au plan $\mathcal{P}$.

$B \in \mathcal{P} \iff 2a - a + 1 - 4 = 0$

$\iff a - 3 = 0$

$\iff \boxed{a = 3}$ donc $\boxed{B(3, 3, 1)}$

3) Soit $\vec{u}(4, -2, 2)$

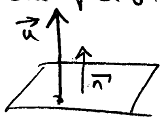
$\vec{u}$ est-il normal au plan $\mathcal{P}$?

On sait que $\vec{n}(2, -1, 1)$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

On a $\vec{u} = 2\vec{n}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

donc $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.



Ex 2 Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point $M(2, -1, 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1, 3, 2)$

Donner une équation du plan $\mathcal{P}$.

D'après $\vec{n}$, $\mathcal{P}$ a pour équation $-x + 3y + 2z + d = 0$

$M \in \mathcal{P}$ donc $-2 - 3 + 8 + d = 0$

$d = -3$

Conclusion : $\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{-x + 3y + 2z - 3 = 0}$

Ex 3 Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B, C avec $A(2, 0, 1)$ $B(-1, 2, 1)$ $C(3, 1, 0)$

1) Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

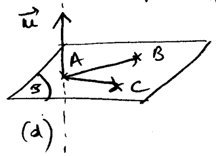
$\overrightarrow{AB}(-3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires $\left(\frac{-3}{1} \neq \frac{2}{1}\right)$

donc A, B, C ne sont pas alignés

2) Soit $\vec{u}(2, 3, 5)$

Vérifier que $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.



Rappel : $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si la droite (d) est orthogonale à $\mathcal{P}$

♡ donc si (d) est orthogonale à deux droites sécantes du plan. (dans ce cas les droites (AB) et (AC))

Traduction vectorielle :

♡ $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan

Réponse : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 + 6 + 0 = 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 3 - 5 = 0$ donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$.

$\vec{u}$ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ donc $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

3) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

$\vec{u}(2, 3, 5)$ est normal au plan $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x + 3y + 5z + d = 0$

$A(2, 0, 1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$.

donc $4 + 0 + 5 + d = 0$

$d = -9$

$\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{2x + 3y + 5z - 9 = 0}$