III Intersection de 2 plans :

Rappel : Si deux plans sont sécants (c.à.d. non parallèles) leur intersection est une droite.

Exemple : $\mathcal{P}_1$ d'équation $2x - y + z + 1 = 0$

$\mathcal{P}_2$ d'équation $3x + 2y - z + 2 = 0$

1) Démontrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$\vec{n_1}(2, -1, 1)$ est normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n_2}(3, 2, -1)$ ——— $\mathcal{P}_2$

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

On cherche les points de coordonnées (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

→ Système de 2 équations à 3 inconnues.

On a une inconnue de trop, que l'on fait passer dans le second membre

$$\iff \begin{cases} 2x - y = -1 - z \\ 3x + 2y = -2 + z \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues principales x et y (Comme d'habitude, la seule différence est que l'on va trouver x et y en fonction de z.)

$2L_1 : 4x - 2y = -2 - 2z$

$L_2 : 3x + 2y = -2 + z$

$2L_1 + L_2 : 7x = -4 - z$ donc $\boxed{x = -\frac{4}{7} - \frac{z}{7}}$

Puis on trouve z à partir de L_1

$2x - y = -1 - z$ donc $y = 2x + z + 1$

$$y = -\frac{8}{7} - \frac{2z}{7} + z + 1 = -\frac{8}{7} - \frac{2z}{7} + \frac{7z}{7} + \frac{7}{7}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{7} + \frac{5z}{7}}$$

On cherche donc les points de coordonnées (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{7} - \frac{z}{7} \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5z}{7} \end{cases}$$

A partir d'une valeur donnée à z, on peut trouver x et y

On prend $\boxed{z = k}$, $k \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{7} - \frac{k}{7} \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5k}{7} \\ z = k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Ceci est la représentation graphique d'une droite passant par le point $A\left(-\frac{4}{7} ; -\frac{1}{7} ; 0\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 1\right)$

ou $\vec{v}(-1, 5, 7)$, avec $\vec{v} = 7\vec{u}$

Cette droite est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

IV Intersection d'une droite et d'un plan :

Rappel : Si une droite n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$ alors elle coupe le plan et leur intersection est un point.

Exemple : Soit $\mathcal{P}$ plan d'équation $4x + 2y - z + 5 = 0$ et (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

TD 19 (4)

1) <u>Démontrer que (d) coupe le plan $\mathcal{P}$.</u>

$\mathcal{P}$ a pour vecteur <u>normal</u> $\vec{n}(4, 2, -1)$

(d) a pour vecteur <u>directeur</u> $\vec{u}(1, -2, -1)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 4 - 4 + 1 = 1 \neq 0$

donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux

donc (d) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.

2) <u>Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) avec le plan $\mathcal{P}$.</u>

On cherche le point de coordonnées (x, y, z)

tels que $4x + 2y - z + 5 = 0$

avec
$$x = 1 + k$$
$$y = -2k$$
$$z = 2 - k$$

On a donc $4(1+k) + 2(-2k) - (2-k) + 5 = 0$.

Ceci nous donnera la valeur de k avec laquelle on pourra calculer x, y, z

$$4 + \cancel{4k} - \cancel{4k} - 2 + k + 5 = 0$$
$$7 + k = 0$$
$$\boxed{k = -7}$$

et donc
$$x = 1 - 7 = -6$$
$$y = 14$$
$$z = 2 + 7 = 9$$

<u>Conclusion</u> : le point d'intersection de (d) et $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(-6, 14, 9)$