I. Calcul d'aire

1. Cas d'une fonction f continue et positive sur $[a\,;\,b]$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan. L'objectif est de calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On suppose dans le cas suivant que f est croissante sur $[a\,;\,b]$.

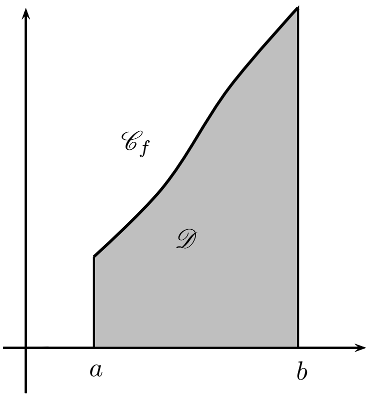

Figure 1

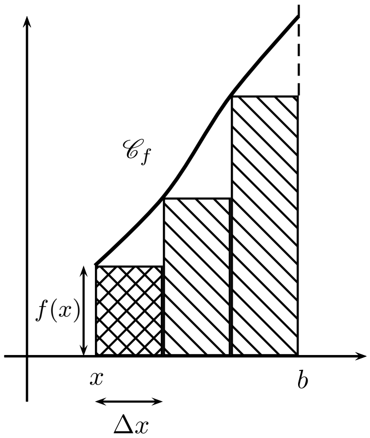

Figure 2

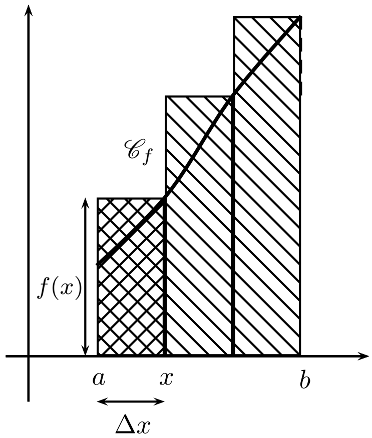

Figure 3

On partage $[a\,;\,b]$ en n segments de même longueur (dans le cas ci-dessus $n = 3$).

On construit des rectangles comme indiqué sur les figures ci-dessus.

Dans la figure 2, on note x l'abscisse du coin inférieur **gauche** d'un rectangle et Δx la largeur d'un rectangle.

On a $x \in [a\,;\,b]$, l'aire d'un rectangle est $f(x) \times \Delta x$ (car $f(x) \geqslant 0$) et la somme des aires de tous ces rectangles est dans ce cas inférieure à l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

Dans la figure 3, on note x l'abscisse du coin inférieur **droit** du rectangle et dans ce cas la somme des aires des rectangles est alors supérieure à l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

On conjecture que si on divise $[a\,;\,b]$ en un nombre plus grand de segments (on fera tendre n vers $+\infty$) , la somme des aires des rectangles se rapproche de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

On admet que quand Δx tend vers 0 la limite de la somme des $f(x) \times \Delta x$, pour x parcourant le segment $[a\,;\,b]$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Cette limite se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ étant la notation de Δx infiniment petit.

On a donc : pour f continue et positive sur $[a\,;\,b]$: $\boxed{\text{Aire}(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

Remarque : si $f(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors $f(x) \times \Delta x \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\text{Aire}(\mathscr{D})$

A retenir :

1. Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire}(\mathscr{D})$

   Si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\text{Aire}(\mathscr{D})$

2. Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\text{Aire}(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   Si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\text{Aire}(\mathscr{D}) = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$