$\boxed{A}$ $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ pour $x \geq 1$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

2) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{-\ln x+1}{x^2}$

3) $f'(x) > 0 \iff -\ln x + 1 > 0$ et $f'(x) = 0$

$\iff 1 > \ln x$ $\iff -\ln x + 1 = 0$

$\iff e > x$ $\iff x = e$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(1) = 0$

$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

$\boxed{B}$ $u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln x\,dx$ $n \geq 0$

1) $u_0 = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

$u'u \mid \frac{u^2}{2}$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

car $u(x) = \ln x$
et $u'(x) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2}$$

$u_0 = \int_1^2 f(x)\,dx$ avec $f(x) \geq 0$ sur $[1,2]$
donc u_0 est l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$

2) On a $1 \leq x \leq 2$ donc $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln 2$ (car ln croissante sur $]0,+\infty[$) ÷ $x^{n+1} > 0$

$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}}\ln x \leq \frac{1}{x^{n+1}}\ln 2$

Par passage aux intégrales

3) On a $0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln x\,dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln 2\,dx$

$0 \leq u_n \leq \ln 2 \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,dx$

$0 \leq u_n \leq \ln 2 \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2$

Si $g(x) = \frac{1}{x^{n+1}} = x^{-n-1}$

$G(x) = \frac{x^{-n-1+1}}{-n-1+1} = \frac{x^{-n}}{-n}$

$G(x) = \frac{1}{-nx^n}$

$0 \leq u_n \leq \ln 2\left(-\frac{1}{n2^n} + \frac{1}{n}\right)$

$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n}\left(-\frac{1}{2^n} + 1\right)$

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0\,(1-0) = 0$

car $2 > 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$