Ex 5

A

$p(0 \le X \le \tau) = p(X \ge \tau)$

signifie que $p(0 \le X \le \tau) = 0,5$

donc $\int_0^\tau \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0,5$

$$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\tau = 0,5$$

$$-e^{-\lambda\tau} + 1 = 0,5$$

$$e^{-\lambda\tau} = 0,5$$

$$-\lambda\tau = \ln(0,5)$$

$$-\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\lambda\tau = -\ln 2$$

$$\boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

2) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{\ln e}{\lambda}$

ou $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \simeq \frac{0,69}{\lambda}$

donc $\boxed{E(X) > \tau}$

$2 < e$ donc $\ln 2 < \ln e$

car $\ln$ croissante sur $]0,+\infty[$

Comme $\lambda > 0$ $\frac{\ln 2}{\lambda} < \frac{1}{\lambda}$

donc $\boxed{\tau < E(X)}$

B $\tau = 5,5$ ans.

1) $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5,5} \simeq \boxed{0,126}$

donc durée de vie moyenne $E(X) = \frac{1}{\lambda} \simeq \frac{1}{0,126} \simeq 7,9$ ans

7,9 ans = 7 ans + 0,9 ans
= 7 ans + 0,9 × 12 mois
= $\boxed{\text{7 ans + 11 mois}}$

2) $p_{(X \ge 8)}(X \ge 10) = p(X \ge 2)$ d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement.

$= 1 - p(X < 2)$

$= 1 - \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-2\lambda} \simeq e^{-2 \times 0,126}$

$\simeq \boxed{0,777}$

Ex 6

$p(X < 1) = 0,16$.

A Loi uniforme sur $[0, T]$

1) $p(X < 1) = p(0 \le X < 1) = \frac{1-0}{T-0} = \frac{1}{T}$

donc $\frac{1}{T} = 0,16$ donc $T = \frac{1}{0,16} = \boxed{6,25}$

2) $p(X \ge 3) = p(3 \le X \le 6,25)$
$= \frac{6,25 - 3}{T - 0} = \frac{3,25}{6,25} = \boxed{0,52}$

3) $E(X) = \frac{0 + T}{2} = \frac{6,25}{2} = \boxed{3,125}$

3 ans + 0,125 ans = 3 ans + 0,125 × 12 mois
= 3 ans + 1,5 mois
= $\boxed{\text{3 ans + 1 mois + 15 jours}}$

B X loi exponentielle

1) $p(X < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$
$= \boxed{-e^{-\lambda t} + 1}$

pour $t = 1$ $p(X < 1) = -e^{-\lambda} + 1$

donc $0,16 = -e^{-\lambda} + 1$

$e^{-\lambda} = 1 - 0,16$

$e^{-\lambda} = 0,84$

$-\lambda = \ln(0,84)$

$\lambda = -\ln(0,84) \simeq 0,174$

2) Calculer $p(X \ge 3)$

Rq: $p(X \ge 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - (-e^{-3\lambda} + 1) = e^{-3\lambda} \simeq \boxed{0,592}$

Ex6 (2)

3) $\underbrace{p(X \geq 5)}_{(X\geq 3)} = p(X \geq 2) = 1 - p(X<2)$

d'après la propriété de loi de durée de vie sans vieillissement

$= 1 - (-e^{-2\lambda} + 1)$

$= e^{-2\lambda}$

$\simeq \boxed{0,705}$

4) b) On cherche t tel que $p(X \leq t) = p(X \geq t)$

Soit tel que $p(X \leq t) = 0,5$

cad $-e^{-\lambda t} + 1 = 0,5$

$-e^{-\lambda t} = -0,5$

$e^{-\lambda t} = 0,5$

$-\lambda t = \ln(0,5)$

$t = \dfrac{\ln(0,5)}{-\lambda}$

$t = \dfrac{\ln(0,5)}{-0,175} \simeq 4$

Durée de vie médiane : 4 ans.

On estime que la moitié des téléviseurs ne dépassent pas 4 ans

a) Durée de vie moyenne : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,175} \simeq \boxed{5,7 \text{ ans}}$

5 ans + 0,7 ans = 5 ans + 0,7 × 12 mois

= $\boxed{5 \text{ ans} + 8 \text{ mois}}$