D'après Pondichery Avril 2007

$f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $[0,+\infty[$

1) ① $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3)}{(x+3)^2} = \dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$

On a $(x+3)^2 > 0$ sur $[0,+\infty[$

Il suffit de montrer que $1-\ln(x+3) < 0$ sur $[0,+\infty[$

Méthode 1 : Si $x \geq 0$ alors $x+3 \geq 3$

$\ln(x+3) \geq \ln 3$

$-\ln(x+3) \leq -\ln 3$

$1-\ln(x+3) \leq 1-\ln 3$

et $1-\ln 3 < 0$

Rmq : car $1 = \ln e$ et $e < 3$ et $\ln \nearrow$ donc $\ln(e) < \ln 3$ càd $1 < \ln 3$.

Méthode 2 : On résout $1-\ln(x+3) < 0$

$1-\ln(x+3) < 0 \iff -\ln(x+3) < -1$

$\iff \ln(x+3) > 1$) exp $\nearrow$

$\iff x+3 > e$

$\iff x > e-3$ or $e-3$ négatif et $x \in [0,+\infty[$

donc $x > e-3$ toujours vrai sur $[0,+\infty[$

donc $1-\ln(x+3) < 0$ toujours vrai sur $[0,+\infty[$

Conclusion : $f'(x) < 0$ sur $[0,+\infty[$ donc f (strictement) décroissante sur $[0,+\infty[$

② $f(0) = \dfrac{\ln(3)}{3}$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

(F.I connue)

2) Si $n \leq x \leq n+1$ comme f décroissante sur $[0,+\infty[$

on a $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

ou $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

(2)

b) On a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ pour $x \in [n, n+1]$

donc $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

$f(n+1)\int_n^{n+1} dx \leq u_n \leq f(n)\int_n^{n+1} dx$.

$f(n+1)\,(n+1-n) \leq u_n \leq f(n)\,(n+1-n)$

$\boxed{f(n+1) \leq u_n \leq f(n)}$ (1) pour tout $n \geq 0$

Rappel : $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$. Dans ce cas $k = f(n+1)$ ou $k = f(n)$ est une constante (ne dépend pas de x)

c) On a donc aussi $\boxed{f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)}$ (2)

Donc d'après (2) $u_{n+1} \leq f(n+1)$

D'après (1) $f(n+1) \leq u_n$

donc $u_{n+1} \leq u_n$

et donc la suite (u_n) est décroissante.

d) Pour montrer que la suite converge, il suffit de montrer qu'elle est minorée.

On a $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ avec $f(x) \geq 0$ sur $[0,+\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$

Conclusion : $u_n \geq 0$.

(u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

On a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3) $F(x) = (\ln(x+3))^2$ sur $[0,+\infty[$

a) Remarque : F est la composée de $x \mapsto \ln(x+3)$ dérivable sur $[0,+\infty[$ et $x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$

$F'(x) = 2(\ln(x+3)) \times \dfrac{1}{x+3} = \boxed{\dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}}$ donc $\boxed{F'(x) = 2f(x)}$

Formule : $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

b) $I_n = \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx.$

$$= \int_0^n \frac{1}{2} \times \frac{2\ln(x+3)}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \int_0^n \frac{2\ln(x+3)}{x+3}\,dx$$

Remarque : $\frac{1}{2}$ peut rester à l'intérieur ou sortir de l'intégrale

$$= \frac{1}{2} \times \Big[F(x) \Big]_0^n$$

⚠ Parenthèses

$$= \frac{1}{2}\big(F(n) - F(0) \big)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\Big(\big(\ln(n+3)\big)^2 - (\ln 3)^2 \Big)}$$

4) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

Chasles

$$= \int_0^n f(x)\,dx$$

$$= I_n$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\big(\ln(n+3)\big)^2 - (\ln 3)^2 \Big)$$

<u>Calcul de</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n+3) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\ln(n+3)\big)^2 = \lim_{Y\to+\infty} Y^2 = +\infty$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\big(+\infty - (\ln 3)^2\big) = \boxed{+\infty}$

donc la suite S_n est divergente.
(Elle ne converge pas)