Ex 2

$n>0 \quad f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$ sur $[1,5]$

1) $f'_n(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^n - \ln x \times n x^{n-1}}{(x^n)^2} = \dfrac{x^{n-1} - n \ln x \times x^{n-1}}{x^{2n}}$

$= \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}} = \dfrac{1-n\ln x}{x^{2n-n+1}} = \boxed{\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}}$

2) On cherche les coordonnées de $A_n$.

$f'_n(x) > 0 \iff 1 - n\ln x > 0$

$\iff -n\ln x > -1$

$\iff \ln x < \dfrac{1}{n}$

$\iff x < e^{\frac{1}{n}}$

| $x$ | $0$ | | $e^{1/n}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

on a $n \geq 1$

$\dfrac{1}{n} \leq 1$

$e^{\frac{1}{n}} \leq e$

donc $e^{\frac{1}{n}} \leq 5$

$f_n(e^{1/n}) = \dfrac{\ln(e^{1/n})}{(e^{\frac{1}{n}})^n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{e} = \dfrac{1}{ne}$

donc $\boxed{A_n\left(e^{1/n}, \dfrac{1}{ne}\right)}$

On a $\dfrac{1}{e}\ln(x_n) = \dfrac{1}{e}\ln(e^{1/n}) = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{ne} = y_n$

donc $\boxed{A_n \in \Gamma}$

3) a) On a $1 \leq x \leq 5$

$0 \leq \ln x \leq \ln 5$ ) $\ln \uparrow$

$0 \leq \dfrac{\ln x}{x^n} \leq \dfrac{\ln 5}{x^n}$ ) $: x^n > 0$

b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5$

$= \dfrac{1}{1-n}\left(5^{-n+1} - 1\right)$

$= \dfrac{1}{1-n}\left(\dfrac{1}{5^{n-1}} - 1\right)$

$= \dfrac{-1}{n-1}\left(\dfrac{1}{5^{n-1}} - 1\right) = \boxed{\dfrac{1}{n-1}\left(-\dfrac{1}{5^{n-1}} + 1\right)}$

c) Sur $[1,5]$ $f_n(x) \geq 0$

donc l'aire cherchée est $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,dx$

$\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx$

D'après 3a) $0 \leq \mathcal{A}_n \leq \displaystyle\int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n}\,dx$

$0 \leq \mathcal{A}_n \leq \ln 5 \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$ d'après 3.b.

$0 \leq \mathcal{A}_n \leq \ln 5 \times \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n-1}}\right)$

$5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln 5 \times \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$= \ln 5 \times \dfrac{1}{+\infty}(1) = \ln 5 \times 0 = 0$

D'après le thm des gendarmes.

$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 0}$