Ex1 Si on note $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$

Sur $[0, 1]$ $f(x) \geq g(x)$

donc $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx$

$\mathcal{A} = \int_0^1 x - x^2\,dx$

$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0$

$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{6}\text{ U.A}}$

$1\text{ U.A} = 3 \times 3\text{ cm}^2 = 9\text{ cm}^2$

donc $\mathcal{A} = \frac{1}{6} \times 9\text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = \frac{9}{6}\text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = \frac{3}{2}\text{ cm}^2$

$\boxed{\mathcal{A} = 1{,}5\text{ cm}^2}$

Aire entre deux courbes (2)

Ex2

1) $h(x) = (-x^2 + x)e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$

Soit $\Phi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$. a, b, c réels.

On cherche a, b, c tels que $\varphi'(x) = h(x)$

$\Phi'(x) = (2ax + b)e^{1-x} + (ax^2 + bx + c) \times (-1)e^{1-x}$

$\Phi'(x) = (2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{1-x}$

$\Phi'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{1-x}$

On résout $\begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = 0 \end{cases}$ $\quad$ $a = 1$, $b = 2a - 1 = 1$, $c = b = 1$

donc $\boxed{\Phi(x) = (x^2 + x + 1)e^{1-x}}$

2) a) Points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = g(x) \iff xe^{1-x} = x^2e^{1-x}$

$\iff xe^{1-x}(1 - x) = 0$

$\iff x = 0$ ou $1 - x = 0$ $\quad$ car $e^{1-x} \neq 0$.

$\iff \boxed{x = 0}$ ou $\boxed{x = 1}$

b) Par lecture graphique et d'après 2a)

Sur $[0, 1]$ $f(x) \geq g(x)$

Sur $[1, 3]$ $g(x) \geq f(x)$

donc $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx + \int_1^3 g(x) - f(x)\,dx$

$= \int_0^1 xe^{1-x} - x^2e^{1-x}\,dx + \int_1^3 x^2e^{1-x} - xe^{1-x}\,dx$

$= \int_0^1 (x - x^2)e^{1-x}\,dx + \int_1^3 (x^2 - x)e^{1-x}\,dx$

$= \int_0^1 h(x)\,dx + \int_1^3 -h(x)\,dx$

$= \left[\Phi(x)\right]_0^1 + \left[-\Phi(x)\right]_1^3$

$= \Phi(1) - \Phi(0) - \Phi(3) + \Phi(1)$

$= 2\Phi(1) - \Phi(0) - \Phi(3)$

$= 2(3e^0) - e - 13e^{-2} = \boxed{6 - e - 13e^{-2}}$

Ex 3 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $\qquad g(x) = \frac{8}{x+2}$

1) $N(x) = x^3 + 2x^2 - 16$

$N(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

$= ax^3+bx^2+cx$
$\quad -2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x - 2c$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-2a = 2 \\ c-2b = 0 \\ -2c = -16 \end{cases}$$

$\boxed{a=1}$

$b = 2+2a = 2+2 = 4$

$\longrightarrow$ Equation vérifiée car $c=8$, $2b=8$ donc $c-2b=0$.

$\boxed{c=8}$ $\qquad \boxed{b=4}$

donc $\boxed{N(x) = (x-2)(x^2+4x+8)}$

2) $f(x)-g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x+2} = \frac{x^2(x+2)-16}{2(x+2)}$

$= \frac{x^3+2x^2-16}{2(x+2)} = \frac{(x-2)(x^2+4x+8)}{2(x+2)}$

Sur $[0,+\infty[$ $\quad 2(x+2)>0$

$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$

Donc $f(x)-g(x)$ a même signe que $x-2$

$\Delta = 16-24<0$ donc trinôme toujours du signe de a donc positif

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	

} Vérification graphique

donc sur $[0,2]$ $f(x) \leq g(x)$ et C_g au dessus de C_f
et sur $[2,+\infty[$ $f(x) \geq g(x)$ et C_f au dessus de C_g.

2a) Si $k \leq 2$

Aire $(D) = \int_0^k g(x)-f(x)\,dx$. car $g(x) \geq f(x)$ sur $[0,2]$

$= \int_0^k \frac{8}{x+2} - \frac{x^2}{2}\,dx = \left[8\ln(x+2) - \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}\right]_0^a$

Rappel : $x+2>0$.

Dln

Aire $(D) = 8\ln(k+2) - \frac{k^3}{6} - 8\ln 2$

$= 8\ln\left(\frac{k+2}{2}\right) - \frac{k^3}{6}$

b) Si $k \geq 2$.

Aire $(D) = \int_0^2 g(x)-f(x)\,dx + \int_2^k f(x)-g(x)\,dx$

car $g(x) \geq f(x)$ sur $[0,2]$ et $f(x) \geq g(x)$ sur $[2,k]$

$= 8\ln 2 - \frac{4}{3} + \left[\frac{1}{6}x^3 - 8\ln(x+2)\right]_2^k$

$= 8\ln 2 - \frac{4}{3}$
$\quad + \frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2) - \frac{8}{6} + \overbrace{8\ln(4)}^{8\times 2\ln 2 = 16\ln 2}$

$= 24\ln 2 - \frac{8}{3} + \frac{k^3}{6} - 8\ln(k+2)$

$= \boxed{24\ln 2 - \frac{8}{3} - 8\ln(k+2) + \frac{k^3}{6}}$

Rmq: $24\ln 2 = 8\times 3\ln 2 = 8\times\ln 8$.

$\boxed{\text{Aire }(D) = 8\ln\left(\frac{8}{k+2}\right) - \frac{8}{3} + \frac{k^3}{6}}$

car $24\ln 2 - 8\ln(k+2)$

$= 8\ln 8 - 8\ln(k+2)$

$= 8(\ln 8 - \ln(k+2))$

$= 8\ln\left(\frac{8}{k+2}\right)$