Groupe **TS**

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

1a) $$f'(x) = 1\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + x\times\frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + x\times\frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{x+3}{x}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + x\times\frac{-3}{x^2}\times\frac{x}{x+3} = \boxed{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} - 3\times\frac{-1}{(x+3)^2}$$

$$= -\frac{3}{x^2}\times\frac{x}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-3}{x(x+3)} + \frac{3}{(x+3)^2}}$$

b) Pour avoir le sens de variation de f', on va chercher le signe de $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{-3(x+3)+3x}{x(x+3)^2} = \frac{-9}{x(x+3)^2} < 0 \quad \text{car } x \geq 1$$

donc f' ↘ sur $[1,+\infty[$

* $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}$$

Composée : $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{X\to1} \ln X = \ln 1 = 0$$

donc $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 - \frac{3}{+\infty} = \boxed{0}$$

En déduire le signe de f' sur $[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	
$f'(x)$	↘	0

On en déduit que $\boxed{f'(x) > 0}$ [0 non atteint car limite]

c) Variation de f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	↗	

d) limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = +\infty\times 0 \quad \text{F.I}$$

Mais en posant $\boxed{X = \frac{3}{x}}$

on a $$x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{X}\ln(1+X) = 3\,\frac{\ln(1+X)}{X}$$

donc $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to0} 3\,\frac{\ln(1+X)}{X} = 3\times1 = \boxed{3}$$

2) $$g(x) = \frac{3x}{x+3}$$

a) Variation de g :

$$g'(x) = \frac{3(x+3) - 3x\times1}{(x+3)^2} = \frac{3x+9-3x}{(x+3)^2} = \frac{9}{(x+3)^2} > 0$$

donc g ↗ sur $[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	

b) limite de g en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{FI} \quad +\infty\times 0.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\times 3}{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{3}{x}} = \boxed{3}$$

c) Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de $f'(x)$

$$f(x) - g(x) = x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + \frac{3x}{x+3} = x\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + \frac{3}{x+3}\right)$$

$$= \boxed{x\,f'(x)}$$

c) Signe de $f(x) - g(x)$

On a $f(x) - g(x) = \underbrace{x}_{\oplus} \underbrace{f'(x)}_{\oplus} > 0$

donc $f(x) > g(x)$ pour tout x de $[1 + \infty[$

donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

Rmq : limite de $f - g$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} x f'(x)$$
$$= +\infty \times 0 \quad \text{F.I}$$

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x)$

$$= 3 - 3$$
$$= 0.$$

Interprétation graphique : Quand x tend vers $+\infty$ les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se rapprochent l'une de l'autre.

Partie C

Soit $a \in [1, +\infty[$

1) Equation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$y = \left(\ln\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{3}{a+3}\right)(x - a) + a \ln\left(1 + \frac{3}{a}\right)$

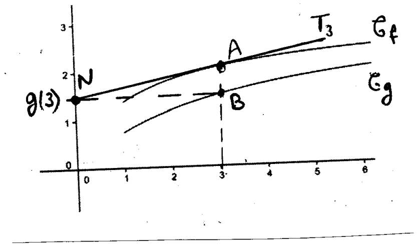
$y = \left(\ln\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{3}{a+3}\right) x - \cancel{a \ln\left(1 + \frac{3}{a}\right)} + \frac{3a}{a+3} + \cancel{a \ln\left(1 + \frac{3}{a}\right)}$

$$\boxed{y = \left(\ln\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{3}{a+3}\right) x + \frac{3a}{a+3}}$$

2) Pour $x = 0$ on a $y = \frac{3a}{a+3}$

$$y = g(a)$$

Conclusion T_a coupe (oy) au point $\boxed{N(0, g(a))}$



Pour $\boxed{a = 3}$

On cherche $N(0, g(3))$

On a $B(3, g(3))$

On en déduit N

On trace (AN) qui est donc T_3

Tangente au point d'abscisse 3.

On peut rédiger de la façon suivante :

Soit le point A appartenant à $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3

Soit le point B appartenant à $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 3

B a pour ordonnée $g(3)$

On en déduit le point N de coordonnées $(0, g(3))$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est donc la droite (AN)