Ex 1

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ce qui prouve que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) Pour démontrer que $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de la droite d'équation $y=1$ on démontre que $f(x)<1$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $f(x) - 1 = \dfrac{1}{1+e^{-x}} - 1 = \dfrac{1-(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$

$= \dfrac{1-1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} < 0$

donc $\boxed{f(x)<1}$ CQFD

3) a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ CQFD

b) $\mathcal{A}_n = \int_0^n 1 - f(x)\,dx$ car $1 > f(x)$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;n]$

$\mathcal{A}_n = [x - F(x)]_0^n$ avec F primitive de f

$\mathcal{A}_n = [x - \ln(e^x+1)]_0^n$ | $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$\boxed{\mathcal{A}_n = n - \ln(e^n+1) + \ln(2)}$ | donc $\boxed{F(x) = \ln(u(x))}$ car $u(x)>0$

c) $\mathcal{A}_n = \ln(e^n) - \ln(e^n+1) + \ln 2$

$\mathcal{A}_n = \ln\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right) + \ln 2$

$\boxed{\mathcal{A}_n = \ln(f(n)) + \ln 2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(f(n)) = \lim\limits_{X\to 1} \ln X = \ln 1 = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \ln 2}$

donc $0 \leq f(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{2}$ pour tout x de $[0,+\infty[$ donc pour tout x de $[n, 2n]$

On a donc $0 \leq \int_n^{2n} f(x)\,dx \leq \int_n^{2n} \dfrac{e^{-x}}{2}\,dx$

$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\int_n^{2n} e^{-x}\,dx$

$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_n^{2n}$

$0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(-e^{-2n} + e^{-n}\right)$

$\boxed{0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2n}} = 0$

$\Bigg\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right) = 0$

D'après <u>le théorème des gendarmes</u> $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

$\boxed{Ex\,2}$ $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1}$ $x \in [0, +\infty[$

1a) Aire du rectangle ABOC $= AB \times OB = AB \times 1 = AB$

<u>Calcul de AB</u>

$A \in \mathcal{C}_f$ avec $x_A = 1$ donc $y_A = f(1) = \dfrac{e^{-1}}{2}$

donc $AB = \dfrac{1}{2e}$ $\boxed{y_A = \dfrac{1}{2e}}$

donc l'aire est égale à $\boxed{\dfrac{1}{2e}}$

b) Sur $[0,1]$ $f(x) \geq 0$

donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Par <u>lecture graphique</u> on peut en déduire que

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2e}}$$

càd $\dfrac{1}{2e}$ est <u>une valeur approchée de</u> $\int_0^1 f(x)\,dx$

2) $U_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$

a) $x \in [0, +\infty[$ donc $\dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$

<u>Méthode</u> : Pour montrer que $A(x) \leq B(x)$

On montre que $B(x) - A(x) \geq 0$

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geq 0$$

donc $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x}{x^2+1}$

<u>Conclusion</u> : Pour tout x de $[0, +\infty[$

$$0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

<u>Autre méthode</u>

On étudie les variations de la f^{on} $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et on montre que pour tout x $g(x) \leq \dfrac{1}{2}$

b) Pour tout x de $[0, +\infty[$

$e^{-x} > 0$ donc $0 \leq \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq \dfrac{e^{-x}}{2}$