A

$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

1) $u(1) = 0$

$u(4) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$ car D asymptote à C_u

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = a + 0 + 0 = a$ donc $\boxed{a = 1}$

donc $\boxed{u(x) = 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$

3) $u(1) = 0$ donc $1 + b + c = 0 \longrightarrow b + c = -1$

$u(4) = 0$ donc $1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = 0 \longrightarrow 16 + 4b + c = 0$

$4b + c = -16$

On résout $\begin{cases} b + c = -1 \\ 4b + c = -16 \end{cases}$

$L_2 - L_1$: $3b = -15$ donc $\boxed{b = -5}$

et $c = -1 - 5$

$\boxed{c = 4}$

Conclusion :

$u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \boxed{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}}$

B

$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x\ln x - 4}{x} = \frac{0 - 5 \times 0 - 4}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = \boxed{-\infty}$ (car $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 5\ln x - \frac{4}{x} = +\infty - \infty - 0$ (FI)

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{5\ln x}{x}\right) - \frac{4}{x} = +\infty(1) - 0 = +\infty$

(car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

3) $f'(x) = 1 - \frac{5}{x} - 4 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = u(x)$

$f'(x) > 0 \iff u(x) > 0$

$\iff x^2 - 5x + 4 > 0$

trinôme

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$

$x_2 = 1$

x	0		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3 - 5\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 - 5\ln 1 - 4$

$f(1) = -3$

$f(4) = 4 - 5\ln 4 - 1$

$= 3 - 5\ln 4$

C

1) $\mathcal{A} = -\int_1^4 u(x)\,dx$ car $u(x) \leq 0$ sur $[1;4]$

$= -[f(x)]_1^4$ car $f'(x) = u(x)$

$= -(f(4) - f(1))$

$= -(3 - 5\ln 4 + 3) = \boxed{5\ln 4 - 6 \text{ u.A}}$

2) $\lambda \geq 4$

$\mathcal{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\,dx = [f(x)]_4^\lambda$

$= f(\lambda) - f(4)$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\lambda \iff f(\lambda) - f(4) = 5\ln 4 - 6$

$\iff f(\lambda) = 5\ln 4 - 6 + f(4)$

$\iff f(\lambda) = 5\cancel{\ln 4} - 6 + 3 - 5\cancel{\ln 4}$

$\iff f(\lambda) = -3$

On a $9 - 10\ln 4 \simeq -4{,}9$

et $3 - 5\ln 4 \simeq -3{,}9$

On a le tableau

x	4		λ		$+\infty$
$f(x)$	$3 - 5\ln 4 \simeq -3{,}9$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue sur $[4, +\infty[$ et strictement croissante.
L'image de $[4, +\infty[$ par f est $[3 - 5\ln 4, +\infty[$
et $-3 \in [3 - 5\ln 4, +\infty[$ donc d'après le TVI, il existe une valeur de λ telle que $f(\lambda) = -3$
(Cette valeur est unique