Ex 1

Soit $n \geq 1$

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

A

1) $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

2) $f_1(x) = \frac{x}{1!} e^{-x} = x e^{-x}$

$f_2(x) = \frac{x^2}{2!} e^{-x} = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

$f_3(x) = \frac{x^3}{3!} e^{-x} = \frac{x^3}{6} e^{-x}$

3) $f'_3(x) = \frac{3x^2}{6} e^{-x} + \frac{x^3}{6} \times e^{-x} \times (-1)$

$f'_3(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x} - \frac{x^3}{6} e^{-x}$

$f'_3(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$

ou $f'_3(x) = x^2 e^{-x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right)$

ou $\boxed{f'_3(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2} \left(1 - \frac{x}{3} \right)}$

Pour tous x $\frac{x^2 e^{-x}}{2} \geq 0$

donc $f'_3(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{3}$

B

1) $n \geq 2$ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$f'_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{n!} e^{-x} + \frac{x^n}{n!} e^{-x} \times (-1)$

$= \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n} \times (n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$\boxed{f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)}$

2) $n \geq 1$ $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a) Soit $h(x) = e^{-x}(-1-x)$

$h'(x) = -e^{-x}(-1-x) + e^{-x} \times (-1)$

$= +e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x} = x e^{-x} = f_1(x)$

donc h est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$

b) $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = [h(x)]_0^1 = h(1) - h(0)$

$I_1 = e^{-1}(-2) - e^0(-1)$

$\boxed{I_1 = -2e^{-1} + 1}$ ou $\boxed{I_1 = -\frac{2}{e} + 1}$

c) $I_n - I_{n-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx$

$= \int_0^1 f_n(x)\,dx - f_{n-1}(x)\,dx$

$= \int_0^1 -f'_n(x)\,dx$

$= [-f_n(x)]_0^1$

$= -f_n(1) + f_n(0)$

$= -\frac{1^n}{n!} e^{-1} - 0 = \boxed{-\frac{e^{-1}}{n!}}$

d) D'après c) $I_2 - I_1 = -\frac{e^{-1}}{2!}$

$I_2 = -\frac{e^{-1}}{2!} + I_1$

$I_2 = -\frac{e^{-1}}{2} - 2e^{-1} + 1$

$\boxed{I_2 = -\frac{5}{2} e^{-1} + 1}$

ou $\boxed{I_2 = -\frac{5}{2e} + 1}$