Suite définie par une intégrale

$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1). Montrer que $I_n \geq 0$ pr $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = (1+x)e^{-x}$

Sur $[-1, +\infty[$ $1+x \geq 0$ car $x \geq -1$
et $e^{-x} > 0$ donc $f(x) \geq 0$.

Conclusion $\int_{-1}^{n} f(x)\,dx \geq 0$ càd $\boxed{I_n \geq 0}$

2) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

On cherche le signe de $I_{n+1} - I_n$ pour $n \geq 0$

On a $I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n}^{-1} f(x)\,dx$ Chasles

$= \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$.

Sur $[n, n+1]$ $f(x) \geq 0$ donc $\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geq 0$

càd $I_{n+1} - I_n \geq 0$ donc $\boxed{I_{n+1} \geq I_n}$

Conclusion. (I_n) est croissante.

3a) $F(x) = e^{-x}(-x-2)$

Il faut justifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
càd montrer que $F'(x) = f(x)$

On a $F'(x) = -e^{-x}(-x-2) + e^{-x}(-1)$

$F'(x) = e^{-x}(x+2-1)$

$F'(x) = e^{-x}(x+1) = f(x)$

Donc $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

b) On a $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx = F(n) - F(-1)$

$= e^{-n}(-n-2) - e^{1}(1-2)$

$= e^{-n}(-n-2) + e$

$\boxed{I_n = -e^{-n}(n+2) + e}$ ou $\boxed{I_n = \frac{-n-2}{e^n} + e}$

c) $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{e^n} - \frac{2}{e^n} + e$

or $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

ou $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0 - \frac{2}{+\infty} + e = \boxed{e}$

d) Comme $f(x) \geq 0$ sur $[-1; n]$

I_n correspond à l'aire comprise entre l'axe (ox), la courbe de f et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = n$.

donc quand n tend vers $+\infty$, cette aire tend vers e.

4) Déterminer un réel α tel que $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$

D'après 3a) $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = F(\alpha) - F(-1)$

$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = (-2-\alpha)e^{-\alpha} + (2-1)e^{1}$

donc $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$

$\iff (-2-\alpha)e^{-\alpha} + e = e$

$\iff (-2-\alpha)e^{-\alpha} = 0$

$\iff -2-\alpha = 0$ car $e^{-\alpha} \neq 0$

$\iff \boxed{\alpha = -2}$

Donc $e = \int_{-1}^{-2} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

on se ramène à une intégrale du type $\int_a^b f(x)\,dx$ avec $\boxed{a < b}$

Sur $[-2; -1]$ $f(x) \leq 0$ donc

$\boxed{-\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx}$ est l'aire comprise entre l'axe (ox), la courbe de f, les droites verticales d'équation $x = -2$ et $x = -1$

Donc oui ce calcul correspond à un calcul d'aire