Ex 1 1) Résoudre $2x^2 - 3x \leq 0$ sur $\mathbb{R}$

Méthode ① Factoriser pour se ramener à un produit

$2x^2 - 3x = x(2x-3)$

② Etudier le signe de $x(2x-3)$ (A l'aide d'un tableau)

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* Pour x les signes sont évidents !

* Pour $2x-3$
$2x-3 = ax+b$
avec $a = 2 > 0$
donc fonction affine croissante
et $2x-3 = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$

Réponse $x(2x-3) \leq 0$ pour $x \in [0; \frac{3}{2}]$

Donc $\boxed{S = [0; \frac{3}{2}]}$

2) Résoudre $\frac{1-x}{x+2} \geqslant 2$ pour $x \neq -2$

$\frac{1-x}{x+2} \geqslant 2 \iff \frac{1-x}{x+2} - 2 \geqslant 0$

$\iff \frac{1-x-2(x+2)}{x+2} \geqslant 0$

$\iff \frac{1-x-2x-4}{x+2} \geqslant 0$

$\iff \frac{-3x-3}{x+2} \geqslant 0$

① on réduit au même dénominateur pour se ramener à un quotient

② On étudie le signe de $\frac{-3x-3}{x+2}$ à l'aide d'un tableau de signes

$-3x-3 = 0$ pour $x = -1$

$x+2 = 0$ pour $x = -2$

$a = -3$
$a < 0$

$a = 1$
$a > 0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-3x-3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x-3}{x+2}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

donc $\frac{-3x-3}{x+2} \geqslant 0$ pour $x \in]-2; -1]$

$\boxed{S =]-2; -1]}$

Ex 2 Soient $f(x) = x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$

1) Démontrer que sur $[-8; 0]$ $f(x) \geq g(x)$

Rappel : Il faut montrer que sur $[-8; 0]$ $f(x) - g(x) \geqslant 0$

On a $f(x) - g(x) = x^2 - 5x + 1 - 2x^2 - 3x - 1$
$= -x^2 - 8x$

Pour montrer que $-x^2 - 8x \geqslant 0$ sur $[0, 8]$, on va étudier le signe de $-x^2 - 8x$ sur $\mathbb{R}$

On a : $-x^2 - 8x = x(-x-8)$

(On se ramène ainsi à la recherche du signe d'un produit que l'on étudie à l'aide d'un tableau de signe)

x	$-\infty$		-8		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(-x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* Pour x évident !

* Pour $-x-8$
$ax+b$
avec $a = -1$
$b = -8$
(affine)
$a = -1 < 0$
f° décroissante
$-x-8 = 0$
pour $x = -8$

Donc sur $[-8; 0]$ $x(-x-8) \geqslant 0$

et donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$

et donc $f(x) \geq g(x)$

2) Que peut on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[-8; 0]$

Sur $[-8, 0]$ $f(x) \geqslant g(x)$

donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$