Aire entre 2 courbes :

Ex 1 $a > 1$ $f(x) = e^{-x}$ $\Delta : y = -x + 1$

1) $\mathcal{A} = \int_0^a f(x)\,dx - \text{Aire}_{\text{triangle}}$ car $f(x) \geq 0$ sur $[0,a]$

$$\int_0^a e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{-a} + e^0 = \boxed{1 - e^{-a}}$$

$$\text{Aire}_{\text{triangle}} = \frac{1 \times 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

donc $\mathcal{A} = 1 - e^{-a} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - e^{-a}}$

2) $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A} = \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{e^a} = \frac{1}{2}$

3) Pour $a = 2$
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - e^{-2}$ U.A
$1\text{ U.A} = 3 \times 2{,}5\text{ cm}^2 = 7{,}5\text{ cm}^2$
donc
$\mathcal{A} = (\frac{1}{2} - e^{-2}) \times 7{,}5\text{ cm}^2$
$\boxed{\mathcal{A} \simeq 2{,}73\text{ cm}^2}$

Ex 2 $f(x) = 1 + \ln x$. T_e

1) $g(x) = x \ln x$
$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$
donc g primitive de f

2) a) Equation de T_e. A d'abscisse e

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 2 \qquad f(e) = 1 + \ln e = 2$$

$$\boxed{y = \frac{x}{e} + 1}$$

b) Abscisse du point B : B est l'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (Ox) on résout donc $f(x) = 0$

$1 + \ln x = 0$
$\ln x = -1$
$x = e^{-1}$
$\boxed{x = \frac{1}{e}}$

c) $\mathcal{A} = \int_{1/e}^{e} \frac{x}{e} + 1\,dx - \int_{1/e}^{e} f(x)\,dx$

ou $\mathcal{A} = \int_{1/e}^{e} \frac{x}{e} + 1 - f(x)\,dx = \left[\frac{1}{e} \times \frac{x^2}{2} + x - g(x)\right]_{1/e}^{e}$

$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2e} + x - x\ln x\right]_{e^{-1}}^{e}$ car $\frac{1}{e} = e^{-1}$

$\mathcal{A} = \frac{e^2}{2e} + e - e\ln e - \left(\frac{e^{-2}}{2e} + e^{-1} - e^{-1}\ln(e^{-1})\right)$

$\mathcal{A} = \frac{e}{2} + \cancel{e} - \cancel{e} - \left(\frac{e^{-3}}{2} + e^{-1} + e^{-1}\right) = \boxed{\frac{e}{2} - \frac{e^{-3}}{2} - 2e^{-1}}$

$\boxed{\mathcal{A} \simeq 0{,}598\text{ U.A}}$