Ex 1 D suit la loi exponentielle de paramètre 0,6

donc $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$f(x) = 0{,}6\, e^{-0{,}6x}$

1) Durée d'attente moyenne : $E(D) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3} \simeq \boxed{1{,}7}$

Environ 1,7 min en moyenne.

2) $P(D < 5) = P(0 \leq D < 5)$

$= \int_0^5 0{,}6\, e^{-0{,}6x}\,dx$

$= \left[-e^{-0{,}6x}\right]_0^5$

$= -e^{-3} + 1 \simeq \boxed{0{,}95}$

Ex 2 X suit une loi exponentielle

donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $\frac{1}{\lambda} = 2000$.

$\lambda = \frac{1}{2000} = \boxed{5 \times 10^{-4}}$

(Rmq $\lambda = \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0{,}5 \times 10^{-3}$)

$P(X \leq 10) = P(0 \leq X \leq 10)$

$= \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10}$

$= 1 - e^{-10\lambda}$

$\simeq \boxed{5 \times 10^{-3}}$

Ex 3 Durée de vie sans vieillissement donc T suit une loi exponentielle.

On a $P(T > 800) = 0{,}45$

$P(T > 1200) = 0{,}30$

Méthode 1 :

On a $P(T \leq 800) = 0{,}55$

càd $P(0 \leq T \leq 800) = 0{,}55$

$\int_0^{800} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}55$

$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{800} = 0{,}55$

$1 - e^{-800\lambda} = 0{,}55$

$e^{-800\lambda} = 0{,}45$

$-800\lambda = \ln(0{,}45)$

$\lambda = \frac{\ln(0{,}45)}{-800} = \boxed{\lambda \simeq 10^{-3}}$

donc $P(T \geq 2000) = 1 - P(0 \leq T < 2000)$

$= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{2000}$

$= 1 - (-e^{-2000\lambda} + 1)$

$= e^{-2000\lambda} = e^{-2000 \times 10^{-3}}$

$= e^{-2} \simeq \boxed{0{,}135}$

Méthode 2

$P_{(T \geq 1200)}(T \geq 2000) = P(T \geq 800)$

d'après la durée de vie sans vieillissement

càd $\frac{P(T \geq 2000 \text{ et } T \geq 1200)}{P(T \geq 1200)} = P(T \geq 800)$

$\frac{P(T \geq 2000)}{P(T \geq 1200)} = P(T \geq 800)$

donc $\frac{P(T \geq 2000)}{0{,}3} = 0{,}45$ donc $P(T \geq 2000) = 0{,}3 \times 0{,}45$

$= \boxed{0{,}135}$

Ex 4 T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On a $P(T \leq 5) = 0{,}675$

1) <u>Calcul de λ :</u>

On a $\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}675$

$$[-e^{-\lambda x}]_0^5 = 0{,}675$$

$$1 - e^{-5\lambda} = 0{,}675$$

$$e^{-5\lambda} = 0{,}325$$

$$-5\lambda = \ln(0{,}325)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0{,}325)}{-5} \simeq \boxed{0{,}225}$$

2) <u>Durée de vie moyenne :</u>

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \simeq \frac{1}{0{,}225} \simeq \boxed{4{,}4 \text{ ans}}$$

4 ans et $0{,}4 \times 12$ mois

$\simeq \boxed{4 \text{ ans et } 5 \text{ mois}}$

3) a) $P(T < 8) = 1 - e^{-8\lambda} \simeq \boxed{0{,}835}$

b) 15 mois $= \frac{15}{12}$ ans $= 1{,}25$ an.

$$P(T > 1{,}25) = 1 - P(T \leq 1{,}25)$$

$$= 1 - (1 - e^{-1{,}25\lambda})$$

$$= e^{-1{,}25\lambda} = e^{-1{,}25 \times 0{,}225} \simeq \boxed{0{,}755}$$

c) $P_{(T>3)}(T>8) = P(T>5)$ d'après prop. de durée de vie sans vieillissement.

$$= 1 - P(T \leq 5)$$

$$= 1 - 0{,}675$$

$$= \boxed{0{,}325}$$

4) a) Succès : "durée de vie supérieure à 10 ans" noté S

$$P(S) = P(T > 10) = 1 - P(T \leq 10)$$

$$= 1 - (1 - e^{-10\lambda})$$

$$= e^{-10\lambda} = e^{-10 \times 0{,}225} = e^{-2{,}25}$$

$\boxed{P(S) = e^{-2{,}25}}$

10 épreuves identiques et indépts.

X compte le nbre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; e^{-2{,}25})$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - e^{-2{,}25})^{10}$$

$$\simeq \boxed{0{,}672}$$

b) On considère n épreuves identiques et indépts.

X suit la loi $\mathcal{B}(n ; e^{-2{,}25})$

<u>On cherche n tel que $P(X \geq 1) > 0{,}999$</u>

$$1 - P(X = 0) > 0{,}999$$

$$1 - (1 - e^{-2{,}25})^n > 0{,}999$$

$$-(1 - e^{-2{,}25})^n > -0{,}001$$

$$(1 - e^{-2{,}25})^n < 0{,}001$$

ln ↗

$$n \ln(1 - e^{-2{,}25}) < \ln(10^{-3})$$

division par nbre négatif.

$$n > \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(1 - e^{-2{,}25})}$$

$\simeq 62{,}02$

$\boxed{n = 63}$

63 composant au minimum